ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 3

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

З. А. Кареян, К. М. Мосесян

Число гамильтонова замыкания орграфа

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 10/XII 1979)

Пусть $L=(X, U)$—произвольный конечный ориентированный граф*. Наименьшее число $r(L)\geqslant 0$ дуг, после добавления которых в полученном орграфе появляется гамильтонов эрцикл, назовем числом гамильтонова замыкания орграфа L. Это определение аналогично определению числа гамильтонова замыкания неориентированного графа, введенного в работе (²), где предлагается алгоритм нахождения $r(\bar{T})$ для произвольного дерева $\bar{T}$. В работе (³) дается алгоритм нахождения $r(\bar{H})$ в случае, если неориентированный граф $\bar{H}$ имеет единственный цикл или точку сочленения.

Через $C(L)$ обозначим наименьшее число попарно непересекающихся простых ориентированных цепей, покрывающих все вершины орграфа L.

В работе (⁴) изучается величина $c(\bar{H})$ для неориентированного графа $\bar{H}$ и указывается алгоритм нахождения $c(\bar{T})$ в случае, когда T—дерево.

В настоящей статье описывается алгоритм, который для всякого ациклического орграфа L выделяет $c(L)$ попарно непересекающихся простых ориентированных цепей, покрывающих все вершины L, и тем самым находит $r(L)$.

Суграф $T=(X, U_1)$ орграфа $L=(X, U)$ называется ориентированным лесом (орлесом) для L (см. (³)), если T не содержит орциклов и полустепень захода для каждой вершины $x\in X$ в T не более 1.

---

* В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в книге (¹), где можно найти все не определяемые здесь понятия.

Обозначим

$$o(L) = \min\{o(T)\},$$

где $o(T)$ — количество тупиковых (висячих) вершин орлеса T и минимум берется по всевозможным орлесам орграфа L.

Очевидно для любого ациклического орграфа L имеет место

Лемма 1. $r(L) = c(L) - o(L)$.

Пусть $L=(X,U)$ — произвольный конечный орграф, не содержащий ориентированных циклов (ациклический орграф). Определим разбиение множества его вершин X на подмножества $X_0, X_1, \ldots, X_p$, где $p \geq 0$ следующим образом ([1], стр. 370 или [6]):

X_0 — множество тупиковых вершин орграфа L, а X_k — множество тупиковых вершин подграфа $L(X \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} X_i)$ ориентированного графа $L=(X, U)$, при $k \in [1, p]$.

Очевидно при любом $i \in [0, p]$ подграф $L(X_i)$ не содержит дуг, и следовательно, при $i \in (0, p-1)$ подграф $L_i = L(X_i \cup X_{i+1})$ — двудольный орграф.

Описание алгоритма. Пусть $L=(X,U)$ — произвольный конечный ориентированный граф.

1°. Разбить множество вершин X на подмножества $X_0, X_1, \ldots, X_p$.

2°. Для каждого $i \in [0, p-1]$ найти некоторое паросочетание Π_i подграфа L_i и образовать

$$\Pi = \bigcup_{i=0}^{p-1} \Pi_i = (Y, W).$$

3°. $X_0^+ := \{x \in X / \neg(\exists z \in X((x, z) \in W))\}$.

4°. Если $X_0^+ \setminus X_0 = \varnothing$, то выделить орграф $H=(X, W)$ и алгоритм считать завершенным.

5°. Если $X_0^+ \setminus X_0 \neq \varnothing$, то выбрать произвольную вершину $y \in X_0^+ \setminus X_0$ и перейти к следующему шагу.

6°. $X_0^- := \{x \in X / \neg(\exists z \in X((z, x) \in W))\}$.

7°. Если $\Gamma^-(y) \cap (X_0^- = \varnothing$, то перейти к шагу 11°.

8°. Если $\Gamma(y) \cap X_0^- \neq \varnothing$, то выбрать произвольную вершину $x \in \Gamma(y) \cap X_0^-$, выбрать некоторую цепь $C(y, x)$ нечетной длины $2l+1$, где $l \geq 0$, состоящую поочередно из дуг $c(y, x, U \setminus W)$, принадлежащих $U \setminus W$, и при $l \neq 0$ из дуг $c(y, x, W)$, принадлежащих W.

9°. $W := (W \setminus C(y, x, W)) \cup C(y, x, U \setminus W)$.

10°. $X_0^+ := X_0^+ \setminus \{y\}$ и перейти к шагу 4°.

11°. $Z := \{x \in X \setminus \Gamma(y) / \exists z \in \Gamma^-(y)((x, z) \in W)\}$, $\Gamma^-(Z) := \Gamma^-(Z) \setminus (Z \cup \{y\})$.

12°. Если $\Gamma^-(Z) \setminus \Gamma^-(y) = \varnothing$, то $X_0^+ := X_0 \setminus \{y\}$, и перейти к шагу 4°.

13°. Если $\Gamma^-(Z) \setminus \Gamma^-(y) \neq \varnothing$, то $\Gamma^-(y) := \Gamma^-(Z)$ и перейти к шагу 7°.

Этим завершается описание алгоритма.

Так как орграф L конечный, легко заметить, что после конечного числа шагов мощность множества X_0^+ уменьшится. В конце концов будет выполняться условие шага 4° и алгоритм завершит свою работу.

Легко заметить, что трудоемкость описанного алгоритма $o(n^3)$, где n — количество вершин рассматриваемого орграфа.

Пусть $H=(X, W)$ получен из орграфа L после применения над ним описанного алгоритма. Через $\bar{X}_0$ обозначим множество тупиковых вершин орграфа H.

Замечание 1. Из описанного алгоритма легко заметить, что всякая нетривиальная компонента орграфа $H=(X, W)$ — простая ориентированная цепь, т. е. H — орлес орграфа L. Докажем, что имеет место следующая

Лемма 2. $o(L)=|\bar{X}_0|$.

Пусть $T=(X, V)$ — некоторый орлес ориентированного графа L, $X_0(T)$ — множество тупиковых вершин и $|X_0(T)|=o(L)$.

По замечанию 1, $|X_0(T)|\leqslant|\bar{X}_0|$. Остается показать, что имеет место неравенство

$$|X_0(T)|\geqslant|\bar{X}_0|. \qquad (\bullet)$$

Определим функцию φ, отображающую множество $\bar{X}_0$ в множество $X_0(T)$ следующим образом:

а) Пусть $x\in\bar{X}_0\cap X_0(T)$.

Будем полагать $\varphi(x)=x$.

б) Пусть $x\in\bar{X}_0\setminus X_0(T)$.

Ясно, что x — вершина, удаленная (в ходе работы алгоритма) из X_0^+ при шаге 12°. Очевидно существуют дуги $(x=x_1, y_1)\in V\setminus W$ и $(x_2, y_1)\in W\setminus V$. Если при $i\geq 2$ $x_i\in X_0(T)$, то полагаем $\varphi(x)=x_i$. Пусть $x_i\notin X_0(T)$. Тогда выберем луги $(x_i, y_i)\in V\setminus W$ и $(x_{i+1}, y_i)\in W\setminus V$ и т. д. Если $j\geq 2$ — наименьшее число, для которого $x_j\in X_0(T)$, то положим $\varphi(x)=x_j$. Таким образом отображение φ определено для всех $x\in\bar{X}_0$.

Покажем, что при $x', x''\in\bar{X}_0$ и $x'\neq x''$ имеет место $\varphi(x')\neq\varphi(x'')$.

Действительно, при $x'\in\bar{X}_0\cap X_0(T)$ или $x''\in\bar{X}_0\cap X_0(T)$ утверждение очевидно. В случае $x', x''\in\bar{X}_0\setminus X_0(T)$, $x'\neq x''$ и $\varphi(x')=x_i'=x_j''=\varphi(x'')$ в W' найдутся дуги (x_i', y_{i-1}) и (x_j'', y_{j-1}), что противоречит замечанию 1. Этим доказывается неравенство $(\bullet)$, а значит и лемма.

Теорема. *Описанный выше алгоритм во всяком ациклическом орграфе L выделяет $c(L)$ попарно непересекающихся простых ориентированных цепей, покрывающих все вершины L.*

Действительно, достаточно воспользоваться леммами 1 и 2.

Замечание 2. С помощью приведенного алгоритма можно решить задачу минимизации числа параллельно идущих вдоль канала магистралей, возникающую при автоматизации проектирования электронных схем.

Авторы выражают глубокую благодарность Католии Пастер, обратившей их внимание на эту задачу.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Զ. Ա. ԿԱՐԵՅԱՆ, Կ. Մ. ՄՈՍԵՍՅԱՆ

Կողմնորոշված գրաֆի համիլտոնյան փակման թիվը

Աղեղների նվազագույն քանակը, որոնց ավելացնելուց հետո L կողմնորոշված գրաֆում առաջանում է համիլտոնյան ցիկլ, կոչվում է L գրաֆի համիլտոնյան փակման թիվ և նշանակվում է $r(L)$-ով։ $c(L)$-ով նշանակենք զույգ առ զույգ չհատվող պարզ կողմնորոշված շղթաների նվազագույն քանակը, որոնք ծածկում են L կողմնորոշված գրաֆի բոլոր գագաթները։

([2-4]) աշխատանքներում կամայական ոչ կողմնորոշված H գրաֆի համար մտցվում են $r(H)$ և $c(H)$ թվերը և ուսումնասիրվում են դրանք գրաֆների մի շարք պարզ դասերի համար։

Ներկա աշխատանքում տրվում է ալգորիթմ, որը կամայական ցիկլազերծ L կողմնորոշված գրաֆում առանձնացնում (անջատում) է $c(L)$ թվով զույգ առ զույգ չհատվող պարզ կողմնորոշված շղթաներ, որոնք ծածկում են L գրաֆի բոլոր գագաթները և դրանով գտնում է $r(L)$ թիվը։ Նշված ալգորիթմի միջոցով կարելի է լուծել էլեկտրոնային սխեմաների նախագծման ավտոմատացման մեջ ծագող զուգահեռ լարերի քանակի մինիմիզացիայի խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Зыков*, Теория конечных графов, I, „Наука", Новосибирск, 1969. [2] *S. E. Goodman, S. T. Hedetniemi*, Lect. Notes. Math., 406, 262—272 (1974). [3] *S. E. Goodman, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater*, J. Assoc. Comput. Mach., 22, No. 3 (1975) [4] *F. T. Boesch, S. Chen, J. A. M. McHugh*, Lect. Notes. Math., 406, 201—212 (1974). [5] *З. А. Кареян*, ДАН АрмССР, т. 67, № 3 (1978). [6] *Л. М. Витовер*, ДАН СССР, т. 147, № 4 (1962).