ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 2

УДК 539.30

МЕХАНИКА

А. А. Хачатрян

О вариационном принципе в разномодульной теории упругости

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 14/VIII 1979)

Известно ([1]), что для разномодульного материала удельная потенциальная энергия деформации в данной точке является выпуклой функцией своих аргументов (компонентов деформации). Исходя из этого ниже показано, что в разномодульной теории упругости, аналогично классической, существует минимальный принцип для перемещений.

1. Приведем вкратце основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости ([2-4]), когда знак одного из главных напряжений (σ_3) отличен от знака двух других ($\sigma_\alpha, \sigma_\gamma$). Законы упругости в системе координат $x_n (n=1, 2, 3)$ имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = (a_{11} - a_{12})\sigma_{ij} + a_{12}\sigma_0\delta_{ij} + (a_{22} - a_{11})m_i m_j \sigma_3 \tag{1.1}$$

или

$$\sigma_{ij} = A\varepsilon_{ij} + B\varepsilon_0\delta_{ij} - C(B\varepsilon_0 + A\varepsilon_3)\,(B\delta_{ij} + Am_i m_j), \tag{1.2}$$

где m_i—направляющие косинусы направления β;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad \sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33};$$

$$A = \frac{1}{a_{11} - a_{12}}, \qquad B = -\frac{a_{12}A}{a_{11} + 2a_{12}}, \quad C = \frac{a_{22} - a_{11}}{1 + (a_{22} - a_{11})(A + B)} \tag{1.4}$$

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \qquad (\text{при } \sigma_3 < 0).$$

Удельная потенциальная энергия деформации (W), выраженная через компоненты тензора деформации, определяется формулой

$$2W = A\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + B\varepsilon_0^2 - C(B\varepsilon_0 + A\varepsilon_3)^2. \tag{1.5}$$

Причем

$$\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}=\sigma_{pq}\ (p<q),\quad \sigma_{ij}=m_i m_j \varepsilon_{ij},\qquad e_{ij}=\begin{cases}\varepsilon_{ij} & i=j\\ 2\varepsilon_{ij} & i\neq j.\end{cases}\tag{1.6}$$

где e_{ij} представляет собой компоненты деформации.

2. Рассмотрим краевую задачу, когда на одной части поверхности тела (S_u) заданы перемещения, а на другой части (S_F) внешние напряжения.

Дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия задачи есть

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+X_i=0,\qquad \begin{matrix}\sigma_{ij}l_j=F_i & \text{на} & S_F\\ u_i=u_i^0 & \text{на} & S_u,\end{matrix}\tag{2.1}$$

где X_i —компоненты объемной силы, F_i—компоненты напряжения на поверхности, l_i'—направляющие косинусы внешней нормали поверхности в данной точке.

Пусть u_i есть решение поставленной задачи. Эти перемещения определяют компоненты деформации, через которые выражается работа деформации всего тела

$$U(e_{pq})=\int W(e_{pq})\,dV.\tag{2.2}$$

Варьируя перемещениями, после известных преобразований [5,8] из (2.2) будем иметь

$$\delta\Pi(e_{pq})=\delta\left\{U(e_{pq})-\int F_iu_i dS-\int X_iu_i\,dV\right\}=0,\tag{2.3}$$

где $\Pi(e_{pq})$—полная потенциальная энергия тела.

Из (2.3) видно, что при действительных перемещениях полная потенциальная энергия тела принимает экстремальное значение.

Выясним теперь, максимум или минимум представляет собой это экстремальное значение для $\Pi(e_{pq})$. Для этого составим разность $\Pi(e_{pq}+\delta e_{pq})-\Pi(e_{pq})$, которая с учетом (2.3) и

$$U(e_{pq}+\delta e_{pq})=U(e_{pq})+\frac{\partial U}{\partial e_i}\delta e_i+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial e_i\partial e_j}\delta e_i\delta e_j+\ \ldots\tag{2.4}$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ 6)$$

приводится к виду

$$\Pi(e_{pq}+\delta e_{pq})-\Pi(e_{pq})=\frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 U}{\partial e_i\partial e_j}\delta e_i\,\delta e_j+\ \ldots\tag{2.5}$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ 6).$$

Здесь для сокращения записи введены обозначения:

$$\begin{matrix}e_{11}=e_1, & e_{13}=e_3, & e_{23}=e_5;\\ e_{12}=e_2, & e_{22}=e_4, & e_{33}=e_6.\end{matrix}\tag{2.6}$$

В работе ([1]) было показано, что для разномодульного материала удельная потенциальная энергия деформации $W(e_{pq})$ в данной точке является выпуклой функцией своих аргументов. На основании этого и принимая во внимание, что в (2.2) интегрирование выполняется по координатам всего объема тела, нетрудно заключить, что $U(e_{ij})$ также будет выпуклой функцией аргументов e_{pq}. Поэтому квадратичная форма правой части (2.5) с коэффициентами $\partial^2 U/\partial e_i \partial e_j$ будет величиной положительной при любых отличных от нуля значениях δe_i. Следовательно положительным будет также и приращение полной потенциальной энергии тела, стоящей в левой части (2.5), при варьировании истинных перемещений.

Таким образом в задачах разномодульной теории упругости, аналогично классической, при действительно возникающих перемещениях полная потенциальная энергия тела принимает минимальное значение.

Этот минимальный принцип для перемещений может быть использован при построении приближенных решений задачи с применением известных вариационных методов.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Տարամոդուլ առաձգականության տեսության վարիացիոն սկզբունքի մասին

Հայտնի է ([1]), որ տարամոդուլ առաձգական նյութի համար դեֆորմացիայի տեսակարար պոտենցիալ էներգիան տվյալ կետում հանդիսանում է ուռուցիկ ֆունկցիա իր արգումենտների (դեֆորմացիայի կոմպոնենտների) նկատմամբ։ Ելնելով դրանից աշխատանքում ցույց է տրված, որ ինչպես կլասիկ, այնպես էլ տարամոդուլ առաձգականության տեսությունում գոյություն ունի մինիմալ սկզբունք տեղափոխությունների համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Хачатрян*, «Известия АН АрмССР», Механика, т. 25, № 6 (1972). [2] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, Инж. журн. МТТ, № 2, 1966. [3] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, Инж. журн. МТТ, № 6, 1966. [4] *С. А. Амбарцумян, А. А. Хачатрян*, ДАН АрмССР, т. 68, № 4 (1969). [5] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости, ОНТИ, М.—Л., 1937. [6] *Г. Каудерер*, Нелинейная механика, Изд. иностр. лит., М., 1961.