ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXX 1980 2

УДК 55.034 + 699.841

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

Р. О. Амасян, Г. Г. Тоноян

Методы установления статистического подобия механических величин в задачах инженерной сейсмологии

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 14/XI 1979)

Многие задачи инженерной сейсмологии решаются методами моделирования, в основе которых лежит теория расширенного подобия твердых деформируемых тел, разработанная А. Г. Назаровым ([1]). Одним из возможных путей повышения надежности информаций, получаемых на моделях, является учет фактора случайности свойств моделей. Дело в том, что во время испытания модели многие процессы происходят под влиянием факторов, которые не могут быть полностью учтены в силу принципиальных причин или практических соображений. Кроме того, при моделировании конструкций делается предположение о полной определенности, детерминированности свойств материалов, внешних нагрузок, геометрических размеров и формы сооружения. Между тем, все эти факторы находятся под влиянием большого количества разнообразных, слабо контролируемых и сложным образом взаимодействующих причин и поэтому в той или иной мере носят изменчивый, случайный характер. В связи с изложенным возникает необходимость привлечения статистических методов к проблеме теории моделирования.

В данной статье разработаны методы установления подобия вероятностных характеристик для механических величин.

Предположим, что состояние оригинала конструкции A и его модели A' полностью определяется набором величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$, являющихся непрерывными и случайными в силу всякого рода случайностей. Найдем условия подобия плотностей распределения вероятностей $f(x)$ и $f'(x')$, начальных моментов $\mu_s(x)$ и $\mu'_s(x')$ и центральных моментов $\nu_s(x)$ и $\nu'_s(x')$ для случайных величин X и X'.

Через α обозначим обобщенный множитель подобия, т. е. каждому определенному значению x случайной величины X соответствует конкретное значение x' случайной величины X', причем:

$$x' = \alpha x. \tag{1}$$

а) Рассмотрим подобие начальных моментов случайных величин X и X' s-го порядка $\mu_s(x)$ и $\mu'_s(x')$

$$\mu'_s(x') = M'[(x')^s] = M[(\alpha x)^s] = \alpha^s \mu_s(x),$$

т. е. для математических ожиданий подобных случайных величин имеет место следующее равенство:

$$m_{x'} = \alpha m_x. \tag{2}$$

б) Для центральных моментов s-го порядка $\nu_s(x)$ и $\nu'_s(x')$ имеем:

$$\nu'_s(x') = M'[(x' - \bar{x}')^s] = M[(\alpha x - \alpha\bar{x})^s] = \alpha^s \nu_s(x).$$

Следовательно, для дисперсии и среднеквадратического отклонения случайных величин X и X' очевидны равенства:

$$D'(x') = \alpha^2 D(x); \quad \sigma'(x') = \alpha\sigma(x). \tag{3}$$

в) Найдем общую закономерность связи между плотностями распределения вероятностей $f(x)$ и $f'(x')$.

Так как системы A и A' подобны, то

$$P(x < X < x + \Delta x) = P(x' < X' < x' + \Delta x'), \tag{4}$$

где $P(x < X < x + \Delta x)$ — вероятность попадания случайной величины X на участок $(x, x + \Delta x)$, а $P(x' < X' < x' + \Delta x')$ — вероятность попадания случайной величины X' на соответствующий участок $(x', x' + \Delta x')$.

Очевидно, что

$$\Delta x' = \alpha \Delta x. \tag{5}$$

Известно, что

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

$$P(x' < X' < x' + \Delta x') = F'(x' + \Delta x') - F'(x'),$$

где F — функция распределения случайных величин ([3]).

Имея в виду (4), получим

$$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(x' + \Delta x') - F'(x'). \tag{6}$$

Рассмотрим следующие отношения:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}; \qquad \frac{F'(x' + \Delta x') - F'(x')}{\Delta x'}.$$

Если в этих отношениях перейти к пределу при $\Delta x \to 0$ и, соответственно, $\Delta x' \to 0$, получим плотности распределения для случайных величин X и X':

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x); \tag{7}$$

$$\lim_{\Delta x'\to 0}\frac{F'(x'+\Delta x')-F'(x')}{\Delta x'}=f'(x'). \tag{8}$$

Подставляя значение (5) в (8) и учитывая (6) и (7), получаем

$$f'(x')=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\alpha\Delta x}=\frac{1}{\alpha}f(x).$$

Таким образом мы получили условие подобия плотностей распределений

$$f'(x')=\frac{1}{\alpha}f(x). \tag{9}$$

Этот результат имеет определенную геометрическую интерпретацию.

Таким образом, множитель подобия математического ожидания подобных случайных величин X и X' совпадает, множитель подобия дисперсии равен квадрату, а множитель подобия плотности распределения вероятностей взаимно-обратен с множителем механического подобия этих величин.

Имея в виду множители механического подобия механических величин [1], можно составить таблицу множителей статистического подобия некоторых механических величин.

Рассмотрим вывод последней связи для конкретных типов распределений вероятностей, наиболее часто встречающихся в практике моделирования сейсмических задач.

1. Рассмотрим случай, когда X и X' имеют одинаковые плотности распределения.

Нормальное распределение. Плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Математическое ожидание m_x и среднеквадратическое отклонение σ_x являются определяющими параметрами данного распределения. Для модели функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f'(x')=\frac{1}{\sigma_{x'}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x'-m'_{x'})^2}{2(\sigma_{x'})^2}}.$$

Имея в виду (1), (2) и (3), преобразуем данную функцию:

Механические величины	Расширенное статистическое подобие			Статистическое подобие, когда ускорения оригинала и модели равны		
	множители подобия математ. ожидания	множители подобия дисперсии	множители подобия плотности распределения	множители подобия математ. ожидания	множители подобия дисперсии	множители подобия плотности распределения
Длина l	α	α^2	α^{-1}	α	α^2	α^{-1}
Напряжение, нагрузка распределена по поверхности σ	β	β^2	β^{-1}	$\alpha\delta$	$\alpha^2\delta^2$	$\alpha^{-1}\delta^{-1}$
Относительная деформация ε	γ	γ^2	γ^{-1}	γ	γ^2	γ^{-1}
Плотность (масса, отнесенная к единице объема) ρ	δ	δ^2	δ^{-1}	δ	δ^2	δ^{-1}
Масса m	$\alpha^3\delta$	$\alpha^6\delta^2$	$\alpha^{-3}\delta^{-1}$	$\alpha^3\delta$	$\alpha^6\delta^2$	$\alpha^{-3}\delta^{-1}$
Время t для квазистатических процессов	γ_t	γ_t^2	γ_t^{-1}	γ_t	γ_t^2	γ_t^{-1}
Время t для динамических процессов	$\alpha\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}$	$\alpha^2\beta^{-1}\gamma_t\delta$	$\alpha^{-1}\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_t^{-\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}$	$\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}$	$\alpha\gamma_t$	$\alpha^{-\frac{1}{2}}\gamma_t^{-\frac{1}{2}}$
Сосредоточенная нагрузка P	$\alpha^2\beta$	$\alpha^4\beta^2$	$\alpha^2\beta^{-1}$	$\alpha^3\delta$	$\alpha^6\delta^2$	$\alpha^3\delta^{-1}$
Перемещение U	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma^2$	$\alpha^{-1}\gamma^{-1}$	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma^2$	$\alpha^{-1}\gamma^{-1}$
Скорость v	$\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}$	$\beta\gamma_t\delta^{-1}$	$\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma_t^{-\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}$	$\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}$	$\alpha\gamma_t$	$\alpha^{-\frac{1}{2}}\gamma_t^{-\frac{1}{2}}$
Раскрытие трещины Δl	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma^2$	$\alpha^{-1}\gamma^{-1}$	$\alpha\gamma$	$\alpha^2\gamma^2$	$\alpha^{-1}\gamma^{-1}$
Момент силы M	$\alpha^3\beta$	$\alpha^6\beta^2$	$\alpha^{-3}\beta^{-1}$	$\alpha^4\delta$	$\alpha^8\delta^2$	$\alpha^{-4}\delta^{-1}$
Работа, энергия U	$\alpha^3\beta\gamma$	$\alpha^6\beta^2\gamma^2$	$\alpha^{-3}\beta^{-1}\gamma^{-1}$	$\alpha^4\gamma\delta$	$\alpha^8\gamma^2\delta^2$	$\alpha^{-4}\gamma^{-1}\delta^{-1}$
Скорость распространения деформации a	$\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}$	$\beta\gamma_t^{-1}\delta^{-1}$	$\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}$	$\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}$	$\alpha\gamma_t^{-1}$	$\alpha^{-\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}$
Ускорение w	$\alpha^{-1}\beta\delta^{-1}$	$\alpha^{-2}\beta^2\delta^{-2}$	$\alpha\beta^{-1}\delta$	1	1	1
Угловая скорость W	$\alpha^{-1}\beta^{\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}\delta^{-\frac{1}{2}}$	$\alpha^{-2}\beta\gamma_t\delta^{-1}$	$\alpha\beta^{-\frac{1}{2}}\gamma_t^{-\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}$	$\alpha^{-\frac{1}{2}}\gamma_t^{\frac{1}{2}}$	$\alpha^{-1}\gamma_t$	$\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma_t^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x') = \frac{1}{\alpha\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\alpha x - \alpha m_x)^2}{2\alpha^2\sigma_x^2}} = \frac{1}{\alpha} f(x).$$

Мы пришли к выводу, что

$$f'(x') = \frac{1}{\alpha} f(x).$$

Логарифмически нормальное распределение. Функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{M}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\lg x - m_y)^2}{2\sigma_y^2}},$$

где $M = \lg e$.

Определяющими параметрами для этого распределения являются m_y и σ_y.

Математическое ожидание m_x и среднеквадратическое отклонение выражаются через определяющие параметры следующим образом:

$$m_x = \exp\left(\frac{m_y}{M} + \frac{\sigma_y^2}{2M}\right);$$

$$\sigma_x = \exp\left(\frac{m_y}{M} + \frac{\sigma_y^2}{2M^2}\right)\sqrt{e^{\frac{\sigma_y^2}{M^2}} - 1}.$$

Для модели будем иметь

$$f'(x') = \frac{M}{x'\sigma'_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\lg x' - m'_{y'}\right)^2}{2\left(\sigma'_{y'}\right)^2}}.$$

Имея в виду (1), (2) и (3), запишем

$$\sqrt{e^{\frac{(\sigma'_{y'})^2}{M^2}} - 1} = \sqrt{e^{\frac{\sigma_y^2}{M^2}} - 1}.$$

Откуда после простых преобразований следует, что $\sigma'_{y'} = \sigma_y$.

Учитывая эту связь, из математических ожиданий оригинала модели получим

$$m'_{y'} = \lg\alpha + m_y.$$

Теперь уже преобразуем $f'(x')$

$$f'(x') = \frac{M}{\alpha x\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lg\alpha x - \lg\alpha - m_y)^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{\alpha} f(x).$$

Мы пришли к аналогическому результату, т. е.

$$f'(x') = \frac{1}{\alpha} f(x).$$

Экспоненциальное распределение. Плотность вероятностей этого распределения имеет вид

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение выражаются через параметр распределения λ следующим образом:

$$m_x = \frac{1}{\lambda}; \qquad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Для подобного распределения $f'(x')$ имеем

$$f'(x') = \lambda' e^{-\lambda' x'}.$$

Имея в виду, что

$$\frac{1}{\lambda'} = \alpha\frac{1}{\lambda},$$

получим

$$f'(x') = \frac{1}{\alpha}\pi e^{-\frac{1}{\alpha}\pi\alpha x} = \frac{1}{\alpha} f(x).$$

Таким образом, для подобных распределений имеем

$$f'(x') = \frac{1}{\alpha} f(x).$$

Распределение Релея. Плотность вероятностей этого распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{\pi x}{2m_x^2} e^{-\frac{\pi x^2}{4m_x^2}}.$$

В этом случае определяющим параметром является математическое ожидание m_x.

Для модели будем иметь .

$$f'(x') = \frac{\pi x'}{2(m_{x'})^2} e^{-\frac{\pi (x')^2}{4(m_{x'})^2}}.$$

Так как $m_{x'} = \alpha m_x$, то получим

$$f'(x') = \frac{\pi\alpha x}{2\alpha^2 m_x^2} e^{-\frac{\pi\alpha^2 x^2}{4\alpha^2 m_x^2}} = \frac{1}{\alpha} f(x).$$

2. Рассмотрим случай, когда X и X' имеют различные плотности распределения.

Пусть случайная величина X имеет плотность распределения гамма с параметром $k=2$, т. е.

$$f(x) = \frac{x}{\beta^2} e^{-\frac{x}{\beta}}, \tag{10}$$

где математическое ожидание $m_x = 2\beta$.

Пусть случайная величина X' имеет плотность распределения Эрланга, т. е. плотность распределения имеет вид

$$f'(x') = \frac{4x'}{m_{x'}^2} e^{-\frac{2x'}{m_{x'}}}, \tag{11}$$

где $m_{x'}$ — математическое ожидание случайной величины X'.

Так как величины X и X' подобны, то имеют место следующие соотношения:

$$x' = \alpha x; \quad m_{x'} = \alpha m_x = 2\alpha\beta.$$

Подставив последние значения в (11), получим

$$f'(x') = \frac{4\alpha x}{\alpha^2 4\beta^2} e^{-\frac{2\alpha x}{2\alpha\beta}} = \frac{1}{\alpha} \frac{x}{\beta^2} e^{-\frac{x}{\beta}}.$$

Если последнее сравнить с (10), получим

$$f'(x') = \frac{1}{\alpha} f(x).$$

Т. е. условие статистического подобия выполняется.

Институт геофизики и
инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Հ. ՀԱՄԱՍՅԱՆ, Գ. Գ. ՏՈՆՈՅԱՆ

Մեխանիկական մեծությունների վիճակագրական նմանության որոշման մեթոդներ ինժեներային սեյսմոլոգիայի խնդիրներում

Հոդվածում մշակված են մեխանիկական մեծությունների հավանականական բնութագրերի նմանության որոշման մեթոդները հավանականության տարբեր բաշխումների դեպքում: Դուրս են բերված այն պայմանները, որոնց պետք է բավարարեն նման մեխանիկական մեծությունների հավանականության խտության բաշխման ֆունկցիաները:

Ստացված տեսական արդյունքների հիման վրա կազմված է ինժեներային սեյսմոլոգիայի խնդիրներում օգտագործվող հիմնական մեխանիկական մեծությունների ընդլայնված վիճակագրական նմանության գործակիցների աղյուսակ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Назаров.* О механическом подобии твердых деформируемых тел. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1965. [2] *Е. С. Вентцель.* Теория вероятностей. Изд. военной лит., М., 1962.