ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 2

УДК 517.942

МАТЕМАТИКА

Г. Ю. Таманян

Лакуны в спектре оператора Хилла

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 19/XII 1979)

В этой работе мы получаем оценку ширины лакуны в спектре оператора Хилла с 1-периодическим, положительным потенциалом из класса Жевре $G_\alpha (\alpha \geq 1)$.

Таким образом, мы рассматриваем уравнение

$$y'' + \lambda^2 p(x) y = 0 \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где $p(x) \in C^{\infty}$ и существует постоянная A такая, что

$$|p^{(k)}| \leq A^k k^{\alpha k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Метод, который мы применяем, аналогичен методу статьи [1], в которой получены аналогичные результаты для уравнения

$$-y'' + q(x) y = \lambda^2 y \quad -\infty < x < \infty, \quad q(x) \in G_\alpha. \tag{3}$$

Отметим, что хотя и существует сведение уравнения (1) к уравнению (3), однако оно не позволяет отнести все результаты, полученные для (3), к (1). Поэтому уравнение (1) приходится изучать параллельно с (3).

Известно (см. [2]), что спектр оператора L, порожденного уравнением (1) в $L_2(-\infty, \infty)$, является чисто непрерывным с лакунами, причем концами лакун являются собственные числа периодической и антипериодической краевых задач на интервале $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} & y'' + \lambda^2 p(x) y = 0 \\ & y(0) = \pm y(1) \\ & y'(0) = \pm y'(1) \end{aligned} \tag{4}$$

Для изучения собственных чисел задач (4) мы изучаем целую функцию $\Delta(\lambda) = C(1, \lambda) + S'(1, \lambda)$, где $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) с начальными данными Коши: $C(0, \lambda) = 1$, $C'(0, \lambda) = 0$, $S(0, \lambda) = 0$, $S'(0, \lambda) = 1$.

Тогда собственные числа задач (4) являются решениями уравнения $\Delta(\lambda) = \pm 2$.

Известно (см. ([3])), что решения $C(x, \lambda)$ и $S(x, \lambda)$ допускают разложение в асимптотические ряды. Для решения $C(x, \lambda)$ это разложение имеет вид:

$$C(x, \lambda) \sim \sum_{s=0}^{1} e^{\lambda \int_0^x \omega_s(t)dt} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu s}(x)}{\lambda^{\nu}}, \tag{5}$$

где $\omega_s(x) = (-1)^s \sqrt{p(x)}$. При этом для коэффициентов $c_{\nu s}(x)$ выполнены рекуррентные соотношения:

$$c_{\nu s}(x) = e^{-\int_0^x T_s(\xi)d\xi} \left[\int_0^x U_s(\xi) c''_{\nu-1, s}(\xi) e^{\int_0^{\xi} T_s(t)dt} d\xi + \alpha_{\nu s} \right]. \tag{6}$$

Здесь $T_s(x) = \omega'_s(x)/2\omega_s(x)$, $U_s(x) = -i/2\omega_s(x)$, $\alpha_{\nu s} = c_{\nu s}(0)$.
Аналогичные формулы верны и для решения $S(x, \lambda)$. Из (6) можно вывести, что

$$c_{\nu 1}(x) = (-1)^{\nu} c_{\nu 0}(x) \equiv (-1)^{\nu} c_{\nu}(x).$$

Исходя из (2) можно получить оценки коэффициентов $c_{\nu}(x)$ (и $s_{\nu}(x)$) в (6).

Сперва, очевидно, надо установить, что $T_s(x)$ и $U_s(x)$ принадлежат G_a. Это делается с использованием формулы Коши: $f(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\lambda)R_g(\lambda)d\lambda$ (обозначения стандартны). Заметим, что прямое доказательство, использующее индукцию, приводит лишь к установлению факта, что $T_s(x) \in G_{a+1}$.

Таким образом мы приходим к следующей лемме:

Лемма 1. *Для функций $T_s(x)$ и $U_s(x)$ выполнены следующие оценки:*

$$|U_s^{(k)}(x)| \le A^k k^{ak} \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$|T_s^{(k)}(x)| \le A^{k+1} \qquad (k+1)^{a(k+1)}.$$

Применением индукции и леммы 1 доказывается

Лемма 2. *Для функций $c_{\nu}(x)$ и их производных имеют место следующие оценки:*

$$|c_{\nu}(x)| \le A^{\nu} \nu^{a\nu}$$

$$|c_{\nu}^{(k)}(x)| \le A^{\nu+k}(\nu+k)^{a(\nu+k)} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Такие же оценки, очевидно, справедливы и для функций $s_{\nu}(x)$.

Формула (5) означает, что для любого N существуют функции $B_{N1}(x, \lambda)$ такие, что при $x \in [0, 1]$ и $\lambda \to \infty$ имеется представление:

$$C(x, \lambda) = e^{i\lambda \int_0^x \sqrt{p(t)}\,dt} \left(\sum_{\nu=0}^{N} \frac{c_\nu}{\lambda^\nu} + \frac{B_{N0}}{\lambda^{N+1}} \right) + e^{-i\lambda \int_0^x \sqrt{p(t)}\,dt} \left(\sum_{\nu=0}^{N} \frac{(-1)^\nu c_\nu}{\lambda^\nu} + \frac{B_{N1}}{\lambda^{N+1}} \right),$$

причем $|B_{N1}(x, \lambda)| \leqslant M$ при $x \in [0, 1]$, $\lambda \to \infty$.
Постоянная M зависит от N, и эту зависимость раскрывает

Лемма 3. *Для функций $B_{N1}(x, \lambda)$ и их производных $\frac{\partial B_{N1}}{\partial x} = D_{N1}(x, \lambda)$ верны оценки:*

$$|B_{N1}(x, \lambda)| \leqslant A^{N+2}(N+2)^{\alpha(N+2)}$$

$$|D_{N1}(x, \lambda)| \leqslant A^{N+2}(N+2)^{\alpha(N+2)}.$$

Лемма 3 доказывается стандартной процедурой, несколько, правда, отличающейся от указанной в [1] и [3].

В силу леммы 3 функции $\Delta(\lambda)$ может быть представлена для любого N в следующем виде:

$$\Delta(\lambda) = e^{i\lambda\mu} \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{\lambda^k} + e^{-i\lambda\mu} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k a_k}{\lambda^k} + \frac{\varphi_N(\lambda)}{\lambda^{N+1}},$$

где $\mu = \int_0^1 \sqrt{p(x)}\,dx$, a_k есть линейные комбинации c_ν и s_ν.

При этом для a_k и $\varphi_N(\lambda)$ верны оценки:

$$|a_k| \leqslant A^k k^{\alpha k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$|\varphi_N(\lambda)| \leqslant A^{N+2}(N+2)^{\alpha(N+2)}.$$

Теперь наша цель заключается в решении уравнения $\Delta(\lambda) = 2$ (аналогично решается уравнение $\Delta(\lambda) = -2$), которое можно переписать в эквивалентной форме:

$$e^{2i\lambda\mu} \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{\lambda^k} - 2e^{i\lambda\mu} + \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k a_k}{\lambda^k} \sim 0. \quad (7)$$

Это уравнение решается точно так же, как соответствующее уравнение в [4]. Итак мы приходим к следующей лемме:

Лемма 4. *Решения уравнения (7) представляют собой две последовательности чисел, одна из которых стремится к $+\infty$ при $n \to \infty$, а другая — к $-\infty$. При этом верны следующие асимптотические разложения:*

$$\lambda_{n1} = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \ldots + \frac{c_N}{n^N} + \frac{\gamma_{N1}}{n^{N+1}}$$

$$\lambda_{n2} = -n - c_0 - \frac{c_1}{n} - \dots - \frac{c_N}{n^N} + \frac{\gamma_{N2}}{n^{N+1}},$$

причем для остатков γ_{N1} и γ_{N2} верны оценки

$$|\gamma_{N1}| \leq A^{N+1}(N+1)^{\alpha(N+1)}$$

$$|\gamma_{N2}| \leq A^{N+1}(N+1)^{\alpha(N+1)}.$$

Используя лемму 4, мы, обозначив ширину n-ой лакуны через Δ_n, получаем следующую теорему:

Теорема. *При условии (2) для ширины n-ой лакуны в спектре оператора L справедлива оценка:*

$$\Delta_n \leq \gamma e^{-\delta n^{1/\alpha}},$$

где γ и δ—некоторые постоянные, не зависящие от n.

В заключение автор приносит искреннюю благодарность профессору А. Г. Костюченко за внимание и поддержку в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Դ. Յու. ԹԱՄԱՆՅԱՆ

Լակունաներ Խիլի օպերատորի սպեկտրում

Դիտարկվում է L օպերատորը, որը առաջանում է $L_2(-\infty, \infty)$ տարածության մեջ հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարման հետևանքով՝

$$y'' + \lambda^2 p(x) y = 0 \qquad -\infty < x < \infty,$$

որտեղ $p(x)$ դրական է, պերիոդիկ և $p(x) \in G_\alpha$ $(\alpha > 1)$: Այդ նշանակում է, որ $p(x) \in C^\infty$ և $|p^{(k)}(x)| \leq A^k k^{\alpha k}$, որտեղ A-ն հաստատուն է, k-ն բնական թիվ է, $\alpha > 1$: Ստացված է L օպերատորի սպեկտրի լակունայի երկարության գնահատումը, որը ցույց է տալիս նրա նվազումը էքսպոնենցիալ ձևով, $1/\alpha$ կարգով:

Կիրառված մեթոդը համանման է (1) հոդվածի մեթոդին, որտեղ ստացված է նույն արդյունքը՝

$$-y'' + q(x) y = \lambda^2 y \qquad -\infty < x < \infty$$

հավասարման համար, որտեղ $q(x)$—պերիոդիկ ֆունկցիա է և $q(x) \in G_\alpha$ $(\alpha > 1)$.

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Х. М. Мкоян*, ДАН Арм ССР, т. 60, № 4 (1975). [2] *Я. Д. Тамаркин*, О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. [3] *А. М. Ляпунов*, Общая задача об устойчивости движения, Харьков, 1892. [4] *Х. М. Мкоян*, канд. дис., Баку, 1977. [5] *А. О. Кравицкий, В. Б. Лидский*, Сибирский мат. журн., т. 12, № 4 (1971).