

УДК 511.6+517.56

МАТЕМАТИКА

В. П. Петренко, Я. Шимша

Об одном классе целых кривых

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракелян 11/XII 1979)

В 1970 г. В. Фукс ⁽¹⁾ установил следующий результат.

Теорема А. Если $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция конечного порядка ρ , все a -точки которой являются простыми a -точками, то

1. Сумма всех дефектов $f(z)$ равна 2;
2. Порядок ρ функции $f(z)$ удовлетворяет такому соотношению $\rho = 0,5t$, где $t = 2, 3, 4, \dots$;
3. Функция $f(z)$ имеет регулярный рост, т. е. ее порядок ρ совпадает с ее нижним порядком λ ;
4. Число дефектных значений у $f(z)$ не превышает 2ρ ;
5. Каждый дефект является кратным ρ^{-1} ;
6. Каждое дефектное значение a является асимптотическим значением для функции $f(z)$.

В данной работе мы интересуемся асимптотическими свойствами одного класса целых кривых, являющегося аналогом класса мероморфных функций, все a -точки которых простые.

Напомним, что n -мерной целой кривой $\bar{G}(z) = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ называется переменный n -мерный вектор, компоненты которого, функции $g_k(z)$, являются линейно независимыми целыми функциями (см. ⁽²⁻⁴⁾).

Определение. Будем говорить, что n -мерная целая кривая $\bar{G}(z) = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ принадлежит классу P_n , если она имеет конечный порядок ρ и для любого n -мерного комплексного вектора $\bar{a}$ ($\bar{a} \neq 0$) все корни скалярного произведения $(\bar{G}(z), \bar{a})$ имеют кратности не выше $n-1$.

По аналогии со случаем мероморфных функций в теории целых кривых используются такие характеристики их роста и распределения значений (см. ⁽²⁻⁴⁾). Функция

$$T(r, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\bar{G}(re^{i\theta})| d\theta$$

называется характеристикой роста целой кривой $\bar{G}(z)$.

Как и в случае мероморфных функций, с помощью $T(r, \bar{G})$ определяется порядок роста $\bar{G}(z)$ ρ и ее нижний порядок роста λ . Характеристики среднего и максимального приближения $\bar{G}(z)$ к вектору $\bar{a}$ определяются так:

$$m(r, \bar{a}, \bar{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{|G(re^{i\theta})| |\bar{a}|}{|(\bar{G}(re^{i\theta}), \bar{a})|} d\theta,$$

$$L(r, \bar{a}, \bar{G}) = \max_{|z|=r} \ln \frac{|G(z)| |\bar{a}|}{|(\bar{G}(z), \bar{a})|}.$$

Величины

$$\delta(\bar{a}, \bar{G}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \bar{a}, \bar{G})}{T(r, \bar{G})} \text{ и } \Delta(\bar{a}, \bar{G}) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \bar{a}, \bar{G})}{T(r, \bar{G})}$$

называются соответственно дефектами целой кривой $\bar{G}(z)$ относительно вектора $\bar{a}$ в смысле Р. Неванлинны и Ж. Валирона. А величина

$$\beta(\bar{a}, \bar{G}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(r, \bar{a}, \bar{G})}{T(r, \bar{G})}$$

называется величиной отклонения $\bar{G}(z)$ относительно вектора $\bar{a}$ (см. (4)).

Для двумерной целой кривой $\bar{G}(z) = \{g_1(z), g_2(z)\}$ данные характеристики совпадают с классическими характеристиками роста и распределения значений мероморфной функции $f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$. По этой причине для двумерных целых кривых, принадлежащих классу P_n , сохраняет силу теорема А.

Основной результат данной работы можно рассматривать как некоторый аналог теоремы В. Фукса для произвольных n -мерных целых кривых. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Для произвольной целой кривой $\bar{G}(z)$, принадлежащей классу P_n , справедливы такие утверждения:

1. Порядок ρ кривой $\bar{G}(z)$ не меньше единицы и является числом рациональным.

2. Кривая $\bar{G}(z)$ имеет регулярный рост, т. е. ее нижний порядок λ совпадает с ее порядком ρ .

3. Для каждого n -мерного вектора $\bar{a}$, для которого $(\bar{G}(z), \bar{a}) \neq 0$, выполняется равенство $\delta(\bar{a}, \bar{G}) = \Delta(\bar{a}, \bar{G})$.

4. Для каждого n -мерного вектора $\bar{a}$, для которого $(\bar{G}(z), \bar{a}) = 0$, имеет место оценка $\beta(\bar{a}, \bar{G}) \leq \pi$.

5. Для произвольной фиксированной допустимой системы* A n -мерных комплексных векторов множества

$$D_A(\bar{G}) = \{\bar{a} \in A : \delta(\bar{a}, \bar{G}) > 0\},$$

$$V_A(\bar{G}) = \{\bar{a} \in A : \Delta(\bar{a}, \bar{G}) > 0\},$$

$$\Omega_A(\bar{G}) = \{\bar{a} \in A : \rho(\bar{a}, \bar{G}) > 0\}$$

содержат не более чем $n(n-1)/2$ векторов.

Доказательство этой теоремы использует ряд вспомогательных утверждений об асимптотических свойствах решений линейных дифференциальных уравнений (д. у.) с полиномиальными коэффициентами. Это объясняется следующими обстоятельствами. Целая кривая $\bar{G}(z) = \{g_k(z)\}_{k=1}^n$ принадлежит классу P_n тогда и только тогда, когда определитель Вронского системы функций $\{g_k(z)\}_{k=1}^n$ не имеет корней. Это утверждение в свою очередь эквивалентно тому факту, что система $\{g_k(z)\}_{k=1}^n$ является фундаментальной системой решений линейного д. у. n -го порядка вида (см. (6), стр. 95)

$$w^{(n)} + a_1(z) w^{(n-1)} + \dots + a_n(z) w = 0, \quad (1)$$

где $a_k(z)$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ — целые функции.

Если дополнительно известно, что целая кривая $\bar{G}(z)$ имеет конечный порядок ρ , то в этом случае в д. у. (1) все коэффициенты являются полиномами (см. (7), стр. 120). Таким образом, изучение роста и распределения значений целых кривых класса P_n сводится к изучению роста и распределения значений фундаментальной системы решений линейного д. у. (1) с полиномиальными коэффициентами. Линейное д. у. (1) с полиномиальными коэффициентами сводится стандартным образом к системе n линейных д. у. первого порядка. Асимптотические свойства подобных систем изучены в книге (8). В связи с тем, что в рассматриваемом случае система линейных д. у. первого порядка носит специальный характер, удастся несколько уточнить асимптотики решений, полученные для общих систем д. у. (см. (9)). Эти уточненные асимптотики для фундаментальной системы решений д. у. (1) и приводят к теореме.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Վ. Գ. ՊԵՏՐԵՆԿՈՒՆ, Կ. ՇԻՄԵԱ

Ամրողը կորեերի մի դասի մասին

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է n -շափանի վերջավոր կարգի ամրողը կորեերի աճը և արժեքների բաշխումը, որոնց բոլոր n -կետերի կարգը

* Т. е. каждые n векторы из этой системы A являются линейно независимыми.

չի գերազանցում $n-1$ -ից: Ճույն է տրվել, որ այդ դասի կորերը ցանկացած
ֆիքսված θ ուղղությամբ վեկտորների համակարգի նկատմամբ ունեն
ոեզոյւյար
աճ և վերջավոր թվով դեֆեկտային արժեքներ:

Այս աշխատանքն ընդհանրացնում է Վ. Ֆուրսի որոշ արդյունքները, որոնք
վերաբերվում են միայն պարզ α -կետեր ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների ա-
սիմպտոտիկական հատկություններին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ W. H. J. Fuchs, Proceedings of the Naval Research Laboratory conference on
classical function theory, Washington, 1970. ² А. А. Голдберг, Дополнение к книге
Г. Виттха „Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям“,
Физматгиз, М., 1960. ³ H. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves, Princeton,
1913. ⁴ H. Cartan, Mathematika, v. 7, 5-31 (1933). ⁵ В. П. Петренко, ДАН СССР,
т. 207, № 3 (1972). ⁶ Э. А. Коттингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных диффе-
ренциальных уравнений, ИЛ, М., 1958. ⁷ Г. Виттх, Новейшие исследования по од-
нозначным аналитическим функциям, Физматгиз, М., 1960. ⁸ В. Визон, Асимптотичес-
кие разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», М.,
1968.