ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 2

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

А. О. Оганесян

О локальной разрешимости и гипоэллиптичности для одного класса уравнений второго порядка.

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/XII 1979)

Как известно ([1]), общее линейное дифференциальное уравнение

$$P(x, D)u = f \tag{1}$$

в случае, когда коэффициенты оператора $P(x, D)$ или функция f не являются аналитическими функциями, не всегда имеет решение (хотя бы локальное). Если оператор $P(x, D)$ является оператором главного типа, то получены условия локальной разрешимости уравнения (1), имеющие окончательный характер. Эти результаты изложены в ([2]), где имеется и подробная библиография. Гораздо меньше изучен вопрос о локальной разрешимости уравнений, не являющихся уравнениями главного типа. Укажем на работы ([3-6]).

В предлагаемой статье изучается вопрос о локальной разрешимости и гипоэллиптичности уравнения второго порядка, не являющегося уравнением главного типа. Схема, предложенная в работе ([6]), переносится на более общее уравнение второго порядка. Полученные условия локальной разрешимости и гипоэллиптичности уравнения обобщают результаты этой работы.

Пусть H — абстрактное гильбертово пространство, а A — неограниченный, обратимый, самосопряженный, положительно определенный оператор, определенный на плотном подмножестве пространства H. Обозначим через J открытое множество на действительной оси, содержащее точку 0.

Рассмотрим оператор второго порядка

$$P = (\partial_t - a(t, A)A)(\partial_t - b(t, A)A) - c(t, A)A, \tag{2}$$

где $a(t, A), b(t, A), c(t, A)$ являются рядами по неотрицательным степеням A^{-1} с коэффициентами из $C^\infty(J)$:

$$a(t, A) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(t)A^{-l};\ b(t, A) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l(t)A^{-l};\ c(t, A) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(t)A^{-l}.$$

Предполагается, что эти ряды, так же как и ряды, полученные из них почленным дифференцированием по t, произвольное число раз сходятся в пространстве $L(H, H)$ равномерно по t на любом компактном подмножестве множества J.

Определим с помощью оператора A шкалу соболевских пространств $H^s(s\in R^1)$: если $s\geq 0$, то $u\in H^s$, если $u\in H$ и $A^s u\in H$ с нормой $\|u\|_s=\|A^s u\|_0$, где через $\|\ \|_0$ обозначена норма пространства $H=H^0$. Если $s<0$, то H^s есть пополнение H по норме $\|u\|_s=\|A^s u\|_0$. Обозначим через $C^\infty(J, H^\infty)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций со значениями в $H^\infty=\bigcap_s H^s$, а $C_0^\infty(J, H^\infty)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными в J носителями со значениями в H^∞. Дуальное к $C_0^\infty(J, H^\infty)$ пространство обозначим $D'(J, H^{-\infty})$.

Определение 1. Оператор P называется локально разрешимым в точке $t=0$, если существует окрестность $J'\subset J$ точки $t=0$, такая, что для любой функции $f\in C_0^\infty(J, H^\infty)$ существует $u\in D'(J', H^{-\infty})$, такая, что

$$Pu=f \quad \text{в } J'.$$

Определение 2. Оператор P называется гипоэллиптическим в J, если для любой окрестности $J'\subset J$ и любого распределения $u\in D'(J', H^{-\infty})$ из $Pu\in C^\infty(J', H^\infty)$ следует, что $u\in C^\infty(J', H^\infty)$.

Оператор P называется гипоэллиптическим в точке $t=0$, если он является гипоэллиптическим в некоторой окрестности этой точки.

Введем следующие обозначения:

$$X=\partial_t-a(t, A)A, \quad Y=\partial_t-b(t, A)A,$$
$$\sigma(t, A)=a(t, A)-b(t, A).$$

В дальнейшем предполагается, что функции $a_0(t)$ и $b_0(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_0^{(s)}(0)=b_0^{(s)}(0)=0 \quad s=0, \dots, k-1; \tag{3}$$

$$\operatorname{Re} a_0^{(k)}(0)>0, \quad \operatorname{Re} b_0^{(k)}(0)<0, \tag{4}$$

где k — нечетное положительное число. Известно ([4]), что при выполнении условий (3), (4) оператор $\tilde{P}=XY$ не является ни локально разрешимым, ни гипоэллиптическим в точке $t=0$. В статье изучаются условия, накладываемые на коэффициент $c(t, A)$, при которых оператор $P=XY-c(t, A)A$ оказывается и локально разрешимым и гипоэллиптическим в точке $t=0$. Случай $k=1$ рассмотрен в ([4]).

Теорема 1. *Пусть оператор P удовлетворяет условиям* (3), (4) *и для любого $t\in J$*

$$t^{k-1}k\left|\frac{a_0^{(k)}(0)-b_0^{(k)}(0)}{k!}\right|^2 < 2\operatorname{Re}\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{c_0^{(l)}(0)}{l!}t^l\frac{\overline{a_0^{(k)}(0)-b_0^{(k)}(0)}}{k!}\right). \tag{5}$$

Тогда существуют постоянные $c_0, c_1>0$ такие, что для любой функции $u\in C_0^\infty(J, H^\infty)$ имеет место неравенство

$$\int_J\left(\|u_t\|^2+\|t^kAu\|^2\right)dt\leq c_0\left|\int_J(Pu,u)dt\right|+c_1\int_J|t|\left(\|u_t\|^2+\|t^kAu\|^2\right)dt. \tag{6}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$a=\frac{a_0^{(k)}(0)}{k!};\quad b=\frac{b_0^{(k)}(0)}{k!};\quad c=\sum_{l=0}^{k-1}\frac{c_0^{(l)}(0)}{l!}t^l;$$

$$\tilde X=\partial_t-at^kA;\quad \tilde Y=\partial_t-bt^kA,\ \tilde P=\tilde X\tilde Y-cA.$$

Учитывая условия (3), нетрудно доказать следующую оценку:

$$\left|\int\left((P-\tilde P)u,u\right)dt\right|\leq c\varepsilon^{-1}\int|t|\left(\|u_t\|^2+\|t^kAu\|^2\right)dt+\varepsilon\int\left(\|u_t\|^2+\|t^kAu\|^2\right)dt,$$

где ε—произвольное положительное число. Поэтому неравенство (6) достаточно доказать для оператора $\tilde P$. Опуская знак $\sim$, запишем

$$P=XY-cA;\quad X=\partial_t-at^kA;\quad Y=\partial_t-bt^kA;$$

$$\operatorname{Re}a>0;\quad \operatorname{Re}b<0.$$

Обозначим $X^*=\partial_t+\bar a t^kA$ и $\sigma=a-b$. В новых обозначениях условие (5) запишется в виде

$$t^{k-1}k|\sigma|^2\leq 2\operatorname{Re}(c\bar\sigma). \tag{7}$$

Имеем

$$-\operatorname{Re}\left\{\bar\sigma\int(Pu,u)dt\right\}=\operatorname{Re}\left\{\bar\sigma\int(Yu,X^*u)dt\right\}+$$

$$+\int\operatorname{Re}(c\bar\sigma)(Au,u)dt=\int\left\{\operatorname{Re}(c\bar\sigma)-\frac{k|\sigma|^2}{2}t^{k-1}\right\}(Au,u)dt+$$

$$+\int\left[(\operatorname{Re}\sigma)\|u_t\|^2-\operatorname{Re}(ab\bar\sigma)\|t^kAu\|^2-\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2}\bar\sigma(a+b)\right\}2\operatorname{Im}(u_t,t^kAu)\right]dt. \tag{8}$$

Отсюда, учитывая условие (7), $\operatorname{Re}\sigma>0$ и легко проверяемое равенство (*)

$$-(\operatorname{Re}\sigma)\operatorname{Re}(ab\bar\sigma)-\left|\operatorname{Im}\frac{1}{2}\bar\sigma(a+b)\right|^2=-(\operatorname{Re}a)(\operatorname{Re}b)|\sigma|^2>0, \tag{9}$$

получим требуемое неравенство (6).

Замечание 1. Пользуясь обозначением $\sigma=|a_0^k(0)-b_0^k(0)|(k!)^{-1}$, запишем условие (5) в следующем виде:

$$2\operatorname{Re}\left(\sum_{i=0}^{k-2}\frac{c_0^{(i)}(0)}{i!}\bar{z}t^i\right)+\left[2\operatorname{Re}\frac{c_0^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}\bar{z}-|z|^2k\right]t^{k-1}\geq 0.$$

Так как t меняется в окрестности нуля, то из этого неравенства следует, что в сумме первый отличный от нуля коэффициент должен быть при четной степени t и этот коэффициент $2Re[c_0^{2l}(0)\bar{z}(2l!)^{-1}]$ должен быть положительным. Тогда, если t меняется в достаточно малом интервале J', содержащем точку $t=0$, то из равенства (8) легко получить следующую оценку:

$$\int\left[\|u_t\|^2+\|t^kAu\|^2+t^{2l}(Au,u)\right]dt\leq c\int(Pu,u)dt \tag{10}$$

Замечание 2. Пусть $c_0^{(i)}(0)=0 \quad i=0,\ldots,k-2$. Имеем

$$\varepsilon k\int t^{k-1}(Au,u)dt\leq\varepsilon\int\|u_t\|^2dt+\varepsilon\int\|t^kAu\|^2dt. \tag{11}$$

Взяв ε достаточно малым и изменив в неравенстве (6) постоянную c_0, получим для достаточно малого интервала J'

$$\int\left[\|u_t\|^2+\|t^kAu\|^2+t^{k-1}(Au,u)\right]dt\leq c\left|\int(Pu,u)dt\right|. \tag{12}$$

Таким образом, если $c_0(t)$ имеет вид $c_0(t)=at^{2q}+g(t)$, $0\leq q\leq\frac{k-1}{2}$, где $a\neq0$, $|g(t)|\leq ct^{2q+1}$ и удовлетворяет условию (5), то для достаточно малых t имеет место неравенство

$$\int\left[\|u_t\|^2+\|t^kAu\|^2+t^{2q}(Au,u)\right]dt\leq c\left|\int(Pu,u)dt\right|. \tag{13}$$

Лемма 1. *Пусть оператор P удовлетворяет неравенству* (13), $\operatorname{Im}c_0(t)$ *не меняет знак в некоторой окрестности точки* $t=0$ *и* $\lim\limits_{t\to0}|\operatorname{Im}c_0(t)|t^{1-k}\neq0$. *Тогда* $\operatorname{Im}c_0(t)=\beta t^{2r}+h(t)$, *где* $0\leq r<\frac{k-1}{2}$, $\beta\neq0$, $|h(t)|\leq ct^{2r+1}$ *и для любой функции* $u\in C_0^\infty(J', H^\infty)$ *имеет место неравенство*

$$\int\left[\|u_t\|^2+\|t^kAu\|^2+t^{2q}(Au,u)+t^{2r}(Au,u)\right]dt\leq c\left|\int(Pu,u)dt\right|, \tag{14}$$

где J' достаточно малый интервал, содержащий точку $t=0$.

Доказательство. Пусть α — действительное число. Тогда

$$\operatorname{Im}\left[\alpha\int(Pu,u)dt\right]=\alpha\operatorname{Im}(ab)\int\|t^kAu\|^2dt+$$

$$+\alpha\int\operatorname{Im}\left[a(u_t,t^kAu)\right]dt-\alpha\int\operatorname{Im}\left[b(t^kAu,u)\right]dt-$$

$$-\alpha\int\sum_{l=2r}^{k-1}\frac{\operatorname{Im}c_0^{(l)}(0)}{l!}t^l(Au,u)\,dt. \tag{15}$$

Выбрав α достаточно малым по абсолютной величине и так, чтобы $-\alpha\operatorname{Im}c_0^{(2r)}(0)>0$, с учетом неравенства (13) получим требуемую оценку (14).

Обозначим $m=\min[q,r]$. Тогда неравенство (14) можно привести к виду

$$\int\left[\|u_t\|^2+\|t^k Au\|^2+t^{2m}(Au,u)\right]dt\leqslant c\left|\int(Pu,u)\,dt\right|. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть оператор P удовлетворяет условиям теоремы 1 и кроме того выполняется одно из двух условий:*

1) $|\operatorname{Im}c_0(t)|\leqslant c|\operatorname{Re}c_0(t)|$;

2) *$\operatorname{Im}c_0(t)$ не меняет знак в некоторой окрестности точки $t=0$.*

Тогда оператор P является и локально разрешимым и гипоэллиптическим в точке $t=0$.

Эта теорема доказывается, в основном, по схеме, изложенной в ([4]) с помощью неравенства (13) при выполнении условия 1 и с помощью неравенства (16) при условии 2.

Лемма 2. *Пусть оператор P удовлетворяет условиям (3), (4). Тогда он равен оператору вида*

$$P^0=(X+\varphi(t,A))(Y-\varphi(t,A))-c^0(t,A)A, \tag{17}$$

где

$$c^0(t,A)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j^0(t)A^{-j};\quad c_0^0(t)=\sum_{l=0}^{k-1}\frac{c_0^{(l)}(0)}{l!}t^l;$$

$$c_j^0=\sum_{l=0}^{k-1}c_{lj}^0t^l\quad j=1,2,\ldots;\qquad \varphi(t,A)=\sum_{l=0}^{\infty}\varphi_l(t)A^{-l}.$$

Доказательство. Раскрывая равенство $P=P^0$, получим:

$$-\left(\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(t)A^{-j}\right)^2+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_{jt}(t)A^{-j}=$$

$$=\sum_{l,j=0}^{\infty}\left[a_j(t)-b_j(t)\right]\varphi_l(t)A^{-(l+j)+1}+\sum_{j=0}^{\infty}\left[c_j^0(t)-c_j(t)\right]A^{-j+1}. \tag{18}$$

Приравнивая коэффициенты при A, приходим к равенству

$$\left[a_0(t)-b_0(t)\right]\varphi_0(t)+\left[c_0^0(t)-c_0(t)\right]=0.$$

Возьмем в качестве функции $c_0^0(t)$

$$c_0^0(t)=\sum_{l=0}^{k-1}\frac{c_0^{(l)}(0)}{l!}t^l.$$

Тогда

$$\varphi_0(t) = \frac{c_0(t) - c_0^0(t)}{a_0(t) - b_0(t)}$$

и $\varphi_0 \in C^\infty(J)$.

Для определения функции $\varphi_1(t)$ получаем следующее соотношение:

$$-\varphi_1'(t) + \varphi_{0t}(t) = \left| a_0(t) - b_0(t) \right| \varphi_1(t) + \left| a_1(t) - b_1(t) \right| \varphi_0(t) + c_1^0(t) - c_1(t).$$

Обозначим

$$f_1(t) = -\varphi_1'(t) + \varphi_{0t}(t) - \left| a_1(t) - b_1(t) \right| \varphi_0(t) + c_1(t).$$

Тогда, если

$$c_1^0(t) = \sum_{i=0}^{k-1} c_{1i}^0 t^i,$$

где $c_{1i}^0 = \dfrac{f_1^{(i)}(0)}{i!}$, то

$$\varphi_1(t) = \frac{f_1(t) - c_1^0(t)}{a_0(t) - b_0(t)}$$

и $\varphi_1 \in C^\infty(J)$.

Продолжая этот процесс, получим требуемое представление оператора P^0 (17).

Введем обозначения

$$X^0 = \partial_t - a^0(t, A)A; \quad Y^0 = \partial_t - b^0(t, A)A,$$

где

$$a^0(t, A) = a(t, A) - \varphi(t, A)A^{-1};$$

$$b^0(t, A) = b(t, A) + \varphi(t, A)A^{-1}.$$

Тогда

$$P^0 = X^0 Y^0 - c^0(t, A)A. \tag{19}$$

Оператор P^0 будет первым элементом в последовательности операторов, порожденной оператором P. Пусть построили оператор P

$$P^j = X^j Y^j - c^j(t, A)A. \tag{20}$$

Тогда

$$P^{j+1} = Y^j X^j - c^j(t, A)A = X^j Y^j - [X^j, Y^j] - c^j(t, A)A =$$

$$= X^j Y^j - |c^j(t, A) + a^j(t, A)| A. \tag{21}$$

Поступая так же, как в случае оператора $P = P^0$, для оператора P^{j+1} получим вид

$$P^{j+1} = X^{j+1}Y^{j+1} - c^{j+1}(t, A)A. \tag{22}$$

Из способа построения последовательности операторов P^j легко получить следующую формулу:

$$c_0^j(t) = \sum_{l=0}^{k-2} \frac{c_0^{(l)}(0)}{l!} t^l + \frac{c_0^{(k-1)}(0) + j\beta_0^{(k)}(0)}{(k-1)!} t^{k-1}. \tag{23}$$

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3. *Пусть оператор P удовлетворяет условиям (3), (4) и для некоторого натурального числа j выполнено неравенство*

$$t^{k-1}k\left|\frac{a_0^{(k)}(0)-b_0^{(k)}(0)}{k!}\right|^2 \le 2\mathrm{Re}\left[\left(\sum_{l=0}^{k-2}\frac{c_0^{(l)}(0)}{l!}t^l + \frac{c_0^{(k-1)}(0)+j\beta_0^{(k)}(0)}{(k-1)!}t^{k-1}\right)\times \overline{\frac{a_0^{(k)}(0)-b_0^{(k)}(0)}{k!}}\right]. \tag{24}$$

Кроме того, пусть $\mathrm{Im}\,c_0(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Тогда следующие три условия эквивалентны:

1) *P – локально разрешим в точке $t=0$;*

2) *P – гипоэллиптичен в точке $t=0$;*

3) *$c^j(t, A) \neq 0$ ни для какого $j=0, 1, \ldots$*

Доказательство этой теоремы в основном аналогично доказательству соответствующей теоремы в ([1]). Заметим, что при $k=1$ условие (24) всегда выполнено.

Ереванский государственный
университет

Ա. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Մի դասի երկրորդ կարգի հավասարումների լոկալ լուծելիության և հիպոէլիպտիկության մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում է երկրորդ կարգի կոմպլեքս բնութագրիչներ ունեցող հավասարումներ։ Այդ բնութագրիչները համընկնում են, երբ $t=0$։ Հավասարման գլխավոր մասը բավարարում է այնպիսի պայմանների, որ եթե ցածր կարգի անդամները հավասար են նույնաբար զրոյին, ապա այդ հավասարումը ոչ լոկալ լուծելի է և ոչ էլ հիպոէլիպտիկ։ Ստացվել են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց պետք է բավարարեն ցածր կարգի անդամները, որպեսզի հավասարումը լինի և լոկալ լուծելի և հիպոէլիպտիկ։ Հոդվածում ստացված արդյունքներն ընդհանրացնում են հայտնի արդյունքներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. В. Егоров*, УМН, т. 26, №2 (1971). [2] *М. И. Вишик, В. В. Грушин*, УМН, т. 25, №4 (1970). [3] *L. Hörmander*, Acta Math., v. 119 (1967). [4] *F. Treves*, Comm. Pure Appl. Math., v. 26 (1973). [5] *A. Gilioli, F. Treves*, Amer. J. Math., v. 96, N 2 (1974). [6] *P. R. Wenston*, J. Diff. Eq., v. 22 (1976).