ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXX 1980 2

УДК 517.983 : 517.95

МАТЕМАТИКА

Г. С. Акопян

О спектральных свойствах пучка дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 4.XII 1979)

Спектральные свойства пучка дифференциальных операторов $\square-\lambda\Delta$, где $\square=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, Δ—оператор Лапласа, при нулевых краевых условиях, впервые были рассмотрены в работах Р. А. Александряна [1–3] в связи с изучением качественного поведения решений системы С. Л. Соболева, описывающей малые колебания вращающейся идеальной жидкости [4,5].

В [2,3] было показано, что порождаемая этим пучком задача Дирихле эквивалентна изучению спектральных свойств оператора $Q=-\Delta^{-1}\square$, действующего в пространстве W_2^1. Было установлено, что в зависимости от границы области спектр оператора Q может быть как чисто точечным, так и содержать интервалы непрерывности.

Исходя из свойств семейства диффеоморфизмов границы области Р. А. Александряном был построен некоторый класс кусочно-постоянных функций, представляющих собой обобщенные собственные функционалы оператора Q.

В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные вопросы для операторов с постоянными коэффициентами, однако уже действующими в пространстве вектор-функций.

Пусть Ω—ограниченная область в R^2 с достаточно гладкой границей Γ.

Рассматривается краевая задача для пучка систем дифференциальных уравнений.

$$A\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2}=-\lambda\Delta\vec{u} \tag{1}$$

$$\vec{u}|_{\Gamma}=0, \tag{2}$$

где A, B, C—$n\times n$ коммутирующие между собой постоянные, вещественные, симметрические матрицы, E—единичная матрица.

В гильбертовом пространстве вектор-функций

$$\vec{W}_2^1(\Omega) = \left\{ \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ \vdots \\ f_n(x, y) \end{pmatrix},\ f_i(x, y) \in W_2^1(\Omega)\ (i = 1, 2, \ldots, n) \right\}$$

рассмотрим оператор $\mathbf{A} = -\Delta^{-1}\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$, где Δ^{-1} — оператор, обратный к оператору Δ при нулевых краевых условиях.

В пространстве $\vec{W}_2^1(\Omega)$ скалярное произведение зададим по формуле

$$(\vec{f}, \vec{g})_1 = \int_\Omega \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial y}\right] dx\,dy.$$

Теорема 1. *В пространстве $\vec{W}_2^1(\Omega)$ оператор $\mathbf{A}$ является ограниченным и самосопряженным, и его собственные функции являются решениями однородной краевой задачи* (1)—(2).

Определение 1. *$\vec{u}_\lambda(x, y) \in \vec{L}_2(\Omega)$ называется собственным функционалом оператора $\mathbf{A}$ или краевой задачи* (1)—(2), *соответствующим собственному значению λ, если*

$$\int_\Omega \vec{u}_\lambda(x, y) \cdot \left[(A + \lambda E)\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial x \partial y} + (C + \lambda E)\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial y^2}\right] dx\,dy = 0$$

для всех

$$\vec{\varphi}(x, y) \in \vec{\Phi}_0(\Omega) = \{\vec{f}(x,y), f(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \vec{f}(x, y)|_\Gamma = 0\}.$$

Пусть a_k, b_k, c_k $(1 \leq k \leq n)$ собственные значения матриц A, B, C и $\gamma_k(\lambda)$ совокупность тех граничных точек*, в которых

$$(a_k + \lambda)\cos^2 \nu x + b_k \cos \nu x \cos \nu y + (c_k + \lambda)\cos^2 \nu y = 0.$$

Лемма 1. *Если собственный функционал $\vec{u}_\lambda(x, y)$ — гладкая вектор-функция и если дополнения к множествам $\gamma_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ являются всюду плотными на Γ, то $\vec{u}_\lambda(x, y)$ является классическим решением задачи* (1)—(2).

Будем считать область Ω „допустимой", т. е. такой, что любая прямая пересекает ее границу не более чем в двух точках.

Рассмотрим однородную краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &(a + \lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (c + \lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ &u|_\Gamma = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

* Здесь ν—внешняя нормаль.

Пусть $y+\mu_1 x=\mathrm{const}$ и $y+\mu_2 x=\mathrm{const}$ — соответственно первое и второе семейство вещественных характеристик уравнения (•)

Диффеоморфизм $S_\lambda^{(-)}(a, b, c)$ (соответственно $S_\lambda^{(+)}(a, b, c)$) сопоставляет каждой точке $\theta \in \Gamma$ точку пересечения с границей Γ характеристики первого семейства (соответственно второго семейства), проходящей через θ.

Диффеоморфизм $S_\lambda(a, b, c)$ определяется как произведение диффеоморфизмов $S_\lambda^{(+)}(a, b, c)$ и $S_\lambda^{(-)}(a, b, c)$, т. е.

$$S_\lambda(a, b, c)=S_\lambda^{(-)}(a, b, c)\cdot S_\lambda^{(+)}(a, b, c).$$

Определение 2. *Орбитой точки $\theta \in \Gamma$ относительно группы, порожденной образующими $S_\lambda(a, b, c)$, $S_\lambda^{-1}(a, b, c)$, называется множество* $\mathrm{Orb}(\theta)=\{S_\lambda^k(a, b, c)\theta,\ k=0, \pm 1, \pm 2 \ldots\}$, *а* $\mathrm{Orb}(S_\lambda^{(+)}(a,b,c)\theta)$ *и* $\mathrm{Orb}(S_\lambda^{(-)}(a, b, c)\theta)$ *называются смежными по отношению к* $\mathrm{Orb}(\theta)$.

Каждая точка $\theta \in \Gamma$ порождает вполне определенную совокупность граничных точек $\mathfrak{M}(\lambda, \theta, \Gamma)$, которая называется λ-орбитой и представляет собой объединение двух смежных орбит, порождаемых этой точкой.

λ-орбита $\mathfrak{M}(\lambda, \theta, \Gamma)$ называется тривиальной, если она содержит точку, в которой касательная к границе Γ параллельна одному из характеристических направлений.

Теорема 2. *Если при $\lambda=\lambda_0$ некоторая итерация диффеоморфизма $S_{\lambda_0}(a, b, c)$ имеет такую неподвижную точку θ_0, что λ_0-орбита $\mathfrak{M}(\lambda_0, \theta_0, \Gamma)$ не является тривиальной, то существует собственный функционал краевой задачи (•), изоморфный ограниченной функции.*

Пусть $A_r(\lambda, a, b, c)$ — совокупность точек $\theta \in \Gamma$, неподвижных относительно r-й итерации отображения $S_\lambda(a, b, c)$.

Ясно, что $\Gamma=A_\infty(\lambda, a, b, c)+\sum\limits_{r=1}^{\infty} A_r(\lambda, a, b, c)$.

Можно доказать (см. (³), лемма 12), что в этом представлении только одно слагаемое под знаком суммы может быть непустым, т. е. либо $\Gamma=A_\infty(\lambda, a, b, c)$, либо существует $r=r(\lambda, a, b, c)$ такое, что $\Gamma=A_\infty(\lambda, a, b, c)+A_r(\lambda, a, b, c)$.

Таким образом, диффеоморфизм $S_\lambda(a, b, c)$ состоит из двух компонент: одна из них индуцирована им на множестве $A(\lambda, a, b, c)$ — периодическая компонента с фиксированным периодом, а другая индуцирована им на множестве $A_\infty(\lambda, a, b, c)$ — апериодическая компонента.

Теорема 3. *Если множество $A(\lambda_0, a, b, c)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то можно построить гладкую собственную функцию краевой задачи (•).*

Справедливость теорем 2.3 устанавливается аналогично доказательству теорем 9.11 из (³).

Теорема 4. *Если при $\lambda=\lambda_0$ для некоторого $1 \leq k \leq n$ существует диффеоморфизм $S_{\lambda_0}(a_k, b_k, c_k)$, конечная итерация которого* *имеет неподвижную точку θ_0 такую, что λ_0-орбита $\mathfrak{M}(\nu_0, \theta_0, \Gamma)$ не является тривиальной, то существует собственный функционал оператора* **A**, *изоморфный ограниченной вектор-функции.*

Теорема 5. *Если при $\nu = \nu_0$ для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n$ множество $A(\nu_0, a_k, b_k, c_k)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то можно построить гладкую собственную вектор-функцию краевой задачи* (1) -(2).

Рассмотрим тот случай, когда Ω—круг.

Лемма 2. *Если Γ есть окружность $x^2+y^2=1$, то множество $A(\nu, a, b, c) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда*

$$\nu = \nu_{l,m} = -\frac{a+c}{2} + \frac{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}\cos\frac{\pi l}{m}, \quad (m=2,3,\ldots,\ l=1,2,\ldots(m-1)).$$

Таким образом, если $\mu_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $\mu_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ решения характеристического уравнения $(a+\nu)\mu^2+b\mu+c+\nu=0$, то множество $A(\nu, a, b, c)$ совпадает с границей Γ тогда и только тогда, когда $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\pi}$ есть число рациональное.

Теорема 6. *Если Ω есть круг $x^2+y^2<1$, то функции*

$$v_{l,m}(x, y) = \cos\left[m \arccos\left(x\sin\left(\frac{\pi l}{2m}-\beta\right) + y\cos\left(\frac{\pi l}{2m}-\beta\right)\right)\right] +$$

$$+ (-1)^{l+1}\cos\left[m \arccos\left(y\cos\left(\frac{\pi l}{2m}+\beta\right) - x\sin\left(\frac{\pi l}{2m}+\beta\right)\right)\right]$$

являются собственными функциями краевой задачи (*), *соответствующими собственному значению $\lambda = \nu_{l,m}$ $(m=2, 3, \ldots,\ l=1, 2, \ldots \ldots (m-1))$, где $\beta = \frac{1}{2}\arccos\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$.*

Лемма 3. *Собственные функции $v_{l,m}(x, y)$ $(m=2, 3, \ldots,\ l=1, 2, \ldots (m-1))$ образуют полную систему в $W^1(\Omega)$.*

Пусть N—невырожденное преобразование, приводящее матрицы A, B, C одновременно к диагональному виду. Из теорем 5, 6 следует, что вектор-функция $\vec{u}_{l,m,k} = N\vec{v}_{l,m,k}$, где $\vec{v}_{l,m,k}$—вектор-функция, k-тая компонента которой равна $v_{l,m}(x, y)$, а остальные компоненты—нули, являются собственными функциями оператора **A**, соответствующими собственным значениям

$$\lambda = \nu_{l,m,k} = -\frac{a_k+c_k}{2} + \frac{\sqrt{(a_k-c_k)^2+b_k^2}}{2}\cos\frac{\pi l}{m}$$

$$(m=2, 3, \ldots,\ l=1, 2, \ldots (m-1),\ k=1, 2, \ldots n).$$

Теорема 7. *Вектор-функции $\vec{u}_{l,m,k}$ $(m=2, 3, \ldots,\ l=1, 2, \ldots \ldots (m-1),\ k=1, 2, \ldots, n)$ образуют полную систему в $\vec{W}_2^1(\Omega)$.*

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածությունում դիֆերենցիալ օպերատորների փնջի սպեկտրալ հատկությունների մասին

Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածությունում դիտարկվում է դիֆերենցիալ օպերատորների փնջով ծնված Դիրիխլեի խնդիրը։ Ապացուցվում է, որ այդ խնդիրը համարժեք է $\vec{W}_2^1$ տարածությունում **A** ինքնահամալուծ և սահմանափակ օպերատորի սպեկտրալ հատկությունների ուսումնասիրությանը։ Օգտագործելով տիրույթի եզրագծի հատուկ դիֆեոմորֆիզմների ընտանիքի հայտնի հատկություններ, հաջողվում է կառուցել այդ օպերատորի ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների որոշակի համախմբություն։ Բերվում է բավարար պայման, որի դեպքում հնարավոր է կառուցել **A** օպերատորի ողորկ սեփական ֆունկցիա։ Այն դեպքում, երբ տիրույթը շրջան է, կառուցվում է բազմանդամային սեփական ֆունկցիաների սիստեմ և ապացուցվում է, որ այն լրիվ է $\vec{W}_2^1$ տարածության մեջ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. А. Александрян*, ДАН СССР, т. 73, № 5 (1950). [2] *Р. А. Александрян*, Дис., МГУ, 1949. [3] *Р. А. Александрян*, Труды Моск. мат. о-ва, т. 9 (1960). [4] *С. Л. Соболев*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, № 1 (1954). [5] *С. Л. Соболев*, ПМФ1, № 3 (1960).