ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 2

УДК 51:621.391

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

К оценке сложности и приближенной расшифровке комбинаторных описаний

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 28/IX 1979)

1. В работе [1] было показано, что ряд известных комбинаторных проблем имеют эквивалентные с точностью до кодирования — декодирования входных—выходных данных представления в стандартной форме проблемы расшифровки описаний (ПРО), а длина минимального теста (д. м. т.) таблицы, специальным образом построенной для данной ПРО, может в ряде случаев служить нижней оценкой ее пиковой сложности. Асимптотические оценки д. м. т. из [2] справедливы только для таблиц с попарно различными строками, а алгоритм построения нижних оценок д. м. т. из [3] по существу требует задания внутренней структуры таблицы. Из сформулированной ниже теоремы 1 следует простой алгоритм вычисления нижних оценок д. м. т. произвольных таблиц с произвольным разбиением их на классы. Теорема 1 дает решение следующей экстремальной задачи.

Пусть R_n — множество всех Δ_n-наборов [4], $\eta=(n,m)$ — произвольная пара чисел, $n>0$, $m<2^n$, $K_\eta=\{S \mid S\subseteq R_n \,\&\, |S|=m\}$, $N_l(S)$ — число всех различных поднаборов длины l наборов S, $S\subseteq R_n$, $l^*_\eta=\min\limits_l (0\leqslant l\leqslant n \,\&\, \exists S(S\in K_\eta \,\&\, N_l(S)<C^l_n)$. Требуется построить систему $S^*\in K_\eta$ такую, что $\forall S\,(S\in K_\eta \to N_{l^*_\eta}(S^*)\leqslant N_{l^*_\eta}(S))$. Подчеркнем, что в отличие от [4] элементы S^* могут быть попарно сравнимы, а длины их заранее не фиксированы.

Пусть $\{2^n\}$ — множество всех двоичных чисел от 0 до $2^{n+1}-1$, $\omega:\{2^n\}\to R_n$ — взаимно-однозначное отображение $\{2^n\}$ на R_n такое, что $\forall\alpha(\alpha\in\{2^n\}\,\&\,\omega(\alpha)=A\to A=\{l \mid (\alpha)_l=0\}$, где $(\alpha)_l$ — цифра l-ого разряда α, $1\leqslant l\leqslant n$. Пусть также $E_\eta=\{F(2^{n+1}-1), F(2^n-2),\ldots, F(2^n-m+2)$, где $F(j)=\omega(\beta^j)$, β^j — двоичная запись числа j, $j=0,1,2,\ldots,2^{n+1}-1$, $c(\alpha)$ число единиц в записи α, $\alpha\in\{2^n\}$ и $(A)_l$ — l-ый элемент набора A, $1\leqslant l\leqslant |A|$. Справедлива следующая

Теорема 1. 1). *Для произвольной пары* $\eta=(n,m)$, $n>0$, $m<2^n$, *число* l^*_η *существует*;

2) $\forall S\,(S\in K_\eta \to N_{l^*_\eta}(E_\eta)\leqslant N_{l^*_\eta}(S))$;

3) $N_l(E_\eta)=C_n^l-\sum\limits_{j=0}^{n-l-1} C^{n-l-j}_{n-a_j-1}$, *где* $a_j=(\omega(\alpha^l))_j$, $1\leqslant j\leqslant n-l$, $0\leqslant l\leqslant n$, $\alpha^l\in[2^n]$,

$c(\alpha^l)=l$, $0\leqslant\alpha^l\leqslant m-1$ *и* $\neg\exists\alpha(\alpha>\alpha^l\ \&\ c(\alpha)=l)$;

4) *если* $\sum\limits_{j=1}^{p}2^{n-j}\leqslant m-1<\sum\limits_{j=1}^{p+1}2^{n-j}$, *при* $p\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $\sum\limits_{j=1}^{0}2^{n-j}=0$, *то* $l^*_\eta=p+1$.

Ясно, что если $K_1,\dots,K_r$ — разбиение произвольной таблицы T n-мерных булевых векторов $r\geqslant 2$, S — множество всех максимально недопустимых наборов для пар векторов из $K_1,\dots,K_r$ [3], а $m=|S|$, то l^*_η может служить оценкой д. м. т. для T.

2. Временная сложность отдельных ПРО может быть непреодолимо большой не только относительно актуально известных алгоритмов, но и относительно оптимальных. Для таких проблем критерий временной сложности теряет свою адекватность, поскольку ни при каких разумных ограничениях на время вычисления индивидуальных задач точные оптимальные решения не могут быть получены и каждый реальный разрешающий алгоритм будет приближенным. Возникают проблемы выбора подходящей меры эффективности работы алгоритмов приближенной расшифровки описаний и ее вычисления. В качестве такой меры нами предлагается вектор с компонентами усредненных временной сложности решения индивидуальных задач и числовой оценки отклонения этих решений от оптимальных. Определение понятия оптимального при такой мере алгоритма нетривиально; в частности, при игровой интерпретации проблемы аксиома симметрии Нэша [5] не выполняется. В данной работе рассматриваются оптимальные только по критерию среднего отклонения алгоритмы при фиксированном среднем времени. Тем не менее при отсутствии аналитического представления оценки по этому критерию требуют анализа каждой индивидуальной задачи, что, как правило, нереализуемо. Для одной из таких комбинаторных проблем — поиска оптимального управления в шахматах (ПОУ^{ш}) [1] получены локально проверяемые достаточные условия увеличения среднего сходства. Доказательство соответствующей теоремы получено при предположении о прямой зависимости между местом, занимаемым данной шахматной стратегией в абсолютном турнире всевозможных стратегий, и степенью ее близости к оптимальной.

3. В дальнейшем изложении определения и обозначения, введенные в [1], предполагаются известными.

Пусть t_φ — верхняя граница времени, допустимого при решении индивидуальных задач ПРО произвольным алгоритмом предельных вычислений (АПВ).

Определение. Будем говорить, что функционал ψ *предназначен для моделирования* квазифункционального отношения φ, $\varphi \subseteq U \times Y$, если $\forall u \in U(\psi(u) \in Y)$. Соответственно, АПВ f ***предназначен для моделирования*** φ, если функционал, вычисляемый f, предназначен для моделирования φ, а каждая гипотеза на выходной ленте f является элементом из Y.

В частности, для ПРО все гипотезы являются парами множеств (ПМ) из T'.

В дальнейшем рассматриваются только t_φ-ограниченные АПВ. Класс таких АПВ, предназначенных для моделирования φ, обозначим через F_φ.

Предполагается, что для каждой исследуемой ПРО определен *алгоритм сходства* A, который гипотезе h ставит в соответствие число $A(\varphi, h, u)$ — сходство гипотезы h с φ-приближением заданной входной записи u. Предполагается также, что $0 \leq A(\varphi, h, u) \leq 1$, $\forall uh$ $(u \in U \& h \in \varphi(u) \to A(\varphi, h, u) = 1)$ и чем больше $A(\varphi, h, u)$, тем достовернее гипотеза h. Разность $1 - A(\varphi, h, u) = a(\varphi, h, u)$ будем называть ***отклонением*** гипотезы h. Например, аналогично ([7]) можно использовать $a(\varphi, h, u) = \min\limits_{v \in \varphi(u)} \frac{h \nabla v}{2k}$, где $k = |M|$, $v, h \in T'$, $\langle M, T, U, \varphi, C_0, C_1 \rangle$ — параметры произвольной ПРО. Если $h = f(u)$, где f — заданный алгоритм поиска управлений (АПУ), то вместо $a(\varphi, h, u)$ будем писать $a(\varphi, f, u)$.

Определение. *Комплексной сложностью отношения φ на аргументе и относительно* АПВ f, или $\langle \varphi, f, u \rangle$ КС, назовем вектор $\langle a(\varphi, f, u), b(\varphi, f, u) \rangle$, где $a(\varphi, f, u)$ — отклонение гипотезы h, построенной f в момент останова, при входной записи u, а $b(\varphi, f, u) = \frac{S(\varphi, f, u)}{t_\varphi}$, где $S(\varphi, f, u)$ — время, затраченное на построение h. ***Средней комплексной сложностью φ относительно f***, или $\langle \varphi, f \rangle$ СКС, назовем вектор $\langle a(\varphi, f), b(\varphi, f) \rangle$, где $a(\varphi, f) = \frac{1}{|U|} \sum\limits_{u \in U} a(\varphi, f, u)$ и $b(\varphi, f) = \frac{1}{|U|} \sum\limits_{u \in U} \frac{S(\varphi, u, f)}{t_\varphi}$.

4. Введем понятие оптимального АПВ, предназначенного для моделирования отношения φ. В нашем представлении оно связывается с множеством F минимальных относительно нижеследующего упорядочения B^0_φ АПВ:

$$\forall f_1 f_2 \in F_\varphi (f_1 B^0_\varphi f_2 \leftrightarrow a(\varphi, f_1) \leq a(\varphi, f_2) \& b(\varphi, f_1) \leq b(\varphi, f_2)),$$

где $a(\varphi, f_i)$, $b(\varphi, f_i)$ — компоненты $\langle \varphi, f_i \rangle$ СКС, $i = 1, 2$.

Легко видеть, что $F \neq \varnothing$ и $\forall f_1, f_2 \in F (a(\varphi, f_1) < a(\varphi, f_2) \Leftrightarrow b(\varphi, f_1) > b(\varphi, f_2))$.

Наши попытки упорядочения F на основе векторной разности СКС элементов F приводили к противоречию с B^0. Безуспешной оказалась также попытка определения оптимальности по Нэшу [3], при интерпретации проблемы в рамках общих арбитражных схем [6]. При этом в качестве I и II игроков рассматривались два противоположных начала, присущие каждому АПВ и ответственные за изменение компонент сходства $x_1 = 1 - a(\varphi, f)$ и быстродействия $x_2 = 1 - b(\varphi, f)$, а сами x_1 и x_2 принимались за доли игроков при дележе (x_1, x_2). Исходный дележ при отсутствии соглашения принимался равным $(0,0)$. В такой интерпретации проблемы можно полагать, что все аксиомы Нэша за исключением аксиомы симметрии приемлемы. В последней требуется инвариантность оптимума при перестановке игроков, что несовместимо с существенно различной природой сходства и быстродействия. Принятое нами упорядочение АПВ основано на их сведении к некоторым, вообще говоря, другим АПВ класса F_φ с одним и тем же средним временем вычислений и сравнении приведенных АПВ по значениям среднего отклонения.

Определение. При заданных отношении φ и среднем нормированном времени α, $0 < \alpha \leq 1$, *α-оптимальным АПВ в классе F_φ* назовем произвольный АПВ $f^* \in F$ такой, что $|b(\varphi, f^*) - \alpha| = \min_{f \in F} |b(\varphi, f) - \alpha|$. Ясно, что α-оптимальный АПВ существует.

5. Пусть исходная ПРО L_0 имеет параметры $\langle M, T', U, \varphi, C_0, C_1 \rangle$. *Приближенной ПРО относительно L_0* назовем проблему, в которой дополнительно к L_0 *заданы*: допустимое время t_0 решения индивидуальных задач L_0, алгоритм сходства $A(\varphi, h, u)$, среднее нормированное время α для оптимального в классе $F_\varphi = F(C_0, C_1)$ АПВ; *требуется* из множества F_φ выделить α-оптимальный.

Приближенную ПРО будем задавать системой параметров $\langle M, T', U, \varphi, C_0, C_1, t_0, A, \alpha \rangle$. Отметим, что использование в ней пары $\langle \varphi, A \rangle$ в определенном смысле равносильно переходу к размытым отношениям по Л. Заде. Исследование влияния „степени размытости" на СКС, регулируемое посредством $A(h, \varphi, u)$, может дать сравнительные оценки эффективности различных типов классификаций, в частности, определяемых отношениями эквивалентности, толерантности или размытыми.

6. Итак, приближенная ПРО сводится нами к оптимизационной проблеме, в которой оптимум задается требованием $\min_{f \in F_\varphi} \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} a(\varphi, f, u)$ при условии $b(\varphi, f) = \alpha$. В общем случае вычисление $a(\varphi, f)$ связано с вычислением $a(\varphi, f, u)$ при каждом $u \in U$, что при больших $|U|$ нереально. Практическое использование критерия $a(\varphi, f)$ в этом случае возможно только для таких ПРО, для которых удается выделить локально проверяемые методы его оценки. Рассмотрим одну из

таких процедур для ПОУ^ш. Она основана на предположении о том, что доли выигрышей, ничьих и проигрышей заданного АПУ f в играх с произвольными другими АПУ при фиксированной начальной позиции P прямо пропорциональны долям концевых вершин соответствующих типов в P-стратегии, порожденной f. Это предположение уточняется посредством нижеследующей аксиомы 1.

Пусть H — множество специальным образом подобранных позиций шахматной игры $И$, используемых как начальные. Будем считать, что определен алгоритм упорядочения (локальный) $A_л$, который по результатам матча заданных АПУ f_i и f_j из $2|H|$ партий, с правом первого хода для f_i и f_j ровно один раз в каждой позиции из H, указывает, равносильны ли f_i и f_j $(f_i \simeq f_j)$ или f_i выигрывает у f_j $(f_i \succ f_j)$.

Будем говорить, что для множества АПУ F определен *турнир* **Т** с параметрами $\langle И, H, A_л, \tau, A_п, A_г \rangle$, если заданы множество начальных позиций H, среднее допустимое время τ выбора хода в произвольной позиции, алгоритмы $A_л$ — локального упорядочения АПУ по результатам матчей с начальными позициями из H, $A_п$ — выбора пар из F для сравнения и $A_г$ — (глобального) линейного упорядочения всех АПУ из F на основе графа матчей. Если АПУ f_i и f_j занимают места i и j относительно упорядочения $A_г$, то будем говорить, что „f_i сильнее f_j" $(f_i > f_j)$, если $i < j$, и „f_i эквивалентно f_j" $(f_i = f_j)$, если $i = j$.

Пусть также **P** — множество всех позиций графа игры ПОУ^ш и F^* — множество всех неэквивалентных (т. е. отличающихся управлением хотя бы в одной позиции) АПУ в ПОУ^ш. Ясно, что F^* конечно. Рассмотрим для F^* *абсолютный турнир* $\mathbf{T}^* = \langle И, H^*, A^*_л, \tau^*, A^*_п, A^*_г \rangle$, параметры которого определены следующим образом.

Пусть $a_{ij}(P)$, при $a_{ij}(P) \in \{0, 1, 2\}$, $f_i, f_j \in F^*$, есть результат партии f_i с f_j при начальном ходе из позиции P для f_i, $a_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{P}|} \sum_{P \in \mathbf{P}} a_{ij}(P)$ и $a_i = \frac{1}{|F^*|} \sum_{f_j \in F^*} a_{ij}$. Тогда в $\mathbf{T}^*$ полагаем: 1) $H^* = \mathbf{P}$; 2) алгоритм $A^*_л$ такой, что $\forall f_i f_j \in F (f_i \succ f_j \leftrightarrow a_{ij} > a_{ji}) \& (f_i \simeq f_j \leftrightarrow a_{ij} = a_{ji})$; 3) $\tau^* = \alpha t_0$; 4) алгоритм $A^*_п$ определяет ровно один матч каждого АПУ из F^* со всеми остальными, т. е. является круговым; 5) алгоритм $A^*_г$ такой, что $\forall f_i f_j \in F (f_i > f_j \leftrightarrow a_i > a_j) \& (f_i = f_j \leftrightarrow a_i = a_j)$. Величину a_i будем называть *абсолютным коэффициентом* АПУ f_i, $f_i \in F^*$, а место f_i относительно упорядочения $A^*_г$ — *абсолютным местом* f_i.

По определению ПОУ^ш оптимальная P-стратегия доставляет $\max\limits_{G \in \mathcal{G}_P} \frac{m_1(G) + 2m_2(G)}{2m(G)}$, где $m_1(G)$, $m_2(G)$ и $m(G)$ — число ничейных, выиг рыших и всех концевых вершин G, а G_P — всевозможные P-стратегии. Естественно считать $B(\varphi, f_i, P) = \frac{m_1(f_i(P)) + 2m_2(f_i(P))}{2m(f_i(P))}$ мерой $A(\varphi, f_i, P)$.

С другой стороны величина $\frac{1}{|F^*|}\sum_{f_j \in F'} a_{ij}(P)$ содержательно близка к $B(\varphi, f_i, P)$, поскольку рассматриваются всевозможные АПУ f_j, и потому можно считать, что доля исходов их встреч с f_i имеет один и тот же коэффициент пропорциональности для концевых вершин каждого из типов стратегии $f_i(P)$. Это предположение дает основание для принятия следующей аксиомы 1: *для произвольных АПУ f и позиции P сходство $A(\varphi, f, P)$ стратегии-гипотезы $f(P)$ с оптимальной равно* $\frac{1}{|F^*|}\sum_{f_j \in F'} a_{ij}(P)$.

Следствие 1. *Среднее сходство гипотез, порождаемых данным АПУ f, равно абсолютному коэффициенту f.*

Следствие 1 при некоторых естественных предположениях позволяет оценивать среднее сходство АПУ f, используя результаты матчей f с другими АПУ, что в отличие от строения P-стратегий представляется более измеримой величиной.

Пусть $f_i \in F^*$, i — номер абсолютного места f_i, $1 \leq i \leq m$, $m = |F^*|$. Принимается следующая

Гипотеза 1 (о зонах устойчивости). *Для произвольного i, $1 \leq i \leq m$, существуют натуральные числа $l_1^i, l_2^i, k_1^i, k_2^i$ $(l_1^i \geq k_1^i, l_2^i \geq k_2^i)$ такие, что при произвольном j, $1 \leq j \leq m$, как правило, справедливы следующие утверждения:*

$$1)\ j \geq i + k_2^i \to \neg(f_i \leftarrow f_j); \qquad 2)\ j > i + l_2^i \to f_i \to f_j;$$

$$3)\ j \leq i - k_1^i \to \neg(f_i \to f_j); \qquad 4)\ j < i - l_1^i \to f_i \leftarrow f_j.$$

Гипотеза 1 хорошо согласуется с нашим представлением о „сильных" и „слабых" шахматистах, отраженным, в частности, посредством рейтингов Эло. А именно, с ростом разницы рейтингов ΔK игрока i относительно игрока j, по таблице Эло ([8]), растет процент ожидаемых от i очков в матче между i и j. При этом если $\Delta K < 735$, i может как выигрывать, так и проигрывать j; в противном случае i всегда выигрывает. Полагая ΔK пропорциональным разнице мест i и j в абсолютном турнире, можно видеть, что выводы Эло и гипотезы 1 аналогичны.

Усилив гипотезу 1, полагая ее утверждения с вероятностью больше определенного порога, связанного с границами k и l, достоверными, можно указать локально проверяемые достаточные условия того, что один АПУ сильнее другого.

Теорема 2. *Для произвольных АПУ f_i и f_j:*

а) *если $f_i \to f_j$, существует множество АПУ F' такое, что*

$|F'|>l_j+k_i^j-1$ и $\forall f \in F'(f_j \leftarrow f \,\&\, f_i \not\leftarrow f)$ *в турнире* $\mathrm{T}=\langle H, H^*, A_s^*, \tau^*, A_n, A_t\rangle$ *для* $F' \cup \{f_i, f_j\}$, *где* H^*, A_s^*, τ^* *— те же, что и в абсолютном турнире, а* A_n *обеспечивает встречу* f_i *и* f_j *с каждым АПУ из* F', *то* $f_j>f_i$; б) *если* $f_i \eqsim f_j$, *существует множество* F'' *такое, что* $|F''|>l_i+k_i^j-1$ *и* $\forall f \in F''(f_j \leftarrow f \,\&\, f_i \not\leftarrow f \vee f_i \eqsim f)$ *в вышеуказанном турнире* T, *то* $f_j>f_i$.

Теорема может служить ориентиром при экспериментальном сравнении усилителей АПУ. Даже при отсутствии оценок для k и l, используя теорему, по меньшей мере можно утверждать, что чем больше $|F'|$ ($|F''|$), тем достовернее выполнение неравенств $f_j>f_i$. Трудностей вычисления величин $a_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{P}|}\sum_{P \in \mathbf{P}} a_{ij}(P)$, связанных с отсутствием всего $\mathbf{P}$, можно избежать рассмотрением *сбалансированных позиций* [9]. При отсутствии таковых приемлемого приближения к a_{ij} можно достичь посредством других, априори равноценных для f_i и f_j позиций.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. Б. Маранджяну за полезное обсуждение работы.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Է. Մ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Կոմբինատոր նկարագրությունների մոտավոր դեկոդավորման և բարդության գնահատման մասին

Կամայական $n>0$ *և* $m<2^n$ *ամբողջ թվերի համար* n *հզորության բազմության* m *ենթաբազմություններից կազմված է* E *սիստեմը։ Նրա* l *հզորության ենթաբազմությունների* $N_l(E)$ *թիվը մինիմալ է այն փոքրագույն* $0<l<n$ *թվի համար, որ գոյություն ունի* $N_l(S)<C_n^l$ *պայմանին բավարարող տրված տիպի որևէ մի սիստեմ* S*։*

Հայտնի է, որ նկարագրությունների դեկոդավորման պրոբլեմներին կարելի է համապատասխանեցնել հատուկ n*-չափանի բուլյան աղյուսակներ, որոնց մինիմալ տեստերի երկարությունները կարող են տալ այդ պրոբլեմների անհատական խնդիրների մաքսիմալ բարդության ներքին գնահատականները։ Վերոհիշյալ* E *սիստեմի հիման վրա կամայական բուլյան աղյուսակների կամայական դասերի տրոհման համար առաջարկված է մինիմալ տեստերի երկարությունները գնահատելու մի պարզ ալգորիթմ, որը տալիս է այդ գնահատականները նույնիսկ այն դեպքում, երբ ի սկզբանե հայտնի են միայն դասերի հզորությունները։*

Սահմանված է կոմբինատոր նկարագրությունների մոտավոր դեկոդավորման պրոբլեմի գաղափարը։

Շախմատային օպտիմալ ղեկավարման պրոբլեմի մոտավոր դրվածքի համար տրված են դիտվող և օպտիմալ ալգորիթմների միջին տարբերության գնահատման լոկալ ստուգվող անհրաժեշտ պայմաններ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. М. Погосян*, ДАН Арм. ССР, т. 68, № 1 (1979). [2] *А. Д. Коршунов*, «Кибернетика», № 6, 1970. [3] *Э. М. Погосян*, ДАН Арм. ССР, т. 50, № 2 (1970). [4] *Э. М. Погосян*, Сб., Комбинаторный анализ, вып. 4, МГУ, М., 1976. [5] *Г. Оуэн*, Теория игр, «Мир» М., 1971. [6] *Н. Н. Воробьев*, Сб. Теоретико-игровые вопросы принятия решений. «Наука», Л., 1978. [7] *А. А. Мартиросян, Э. М. Погосян*, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 4 (1978). [8] *Е. Я. Гик*, Математика на шахматной доске, «Наука», М., 1976. [9] *Э. М. Погосян*, Сб. Материалы Всесоюзной конференции Мат. обеспечение моделирования сложных систем, Киев, 1977.