ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. Г. Рафаелян

Об одном классе целых функций конечного роста

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 6.VII 1979)

1. В настоящей статье приводятся некоторые свойства одного специального класса целых функций конечного порядка и нормального типа. Эти свойства служат основой для решения интерпретационных задач и построения некоторых базисных систем в соответствующих классах целых функций.

Введем сначала некоторые предварительные обозначения:

Для любого $p(1<p<+\infty)$ и $\omega(-1<\omega<p-1)$ обозначим через $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$ класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho(1\leq\rho<2)$ и типа $\sigma(0<\sigma<+\infty)$, для которых

$$\|f\|_{W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}}=\max_{1\leq k\leq 4}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\theta_k})|^p r^\omega dr\right\}^{1/p}<\infty, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\theta_{1,2}&=\pm\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\\ \theta_{3,4}&=\pm\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пространство $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$ было введено М. М. Джрбашяном в работе [1] (см. также [2]).

Обозначим через $H^{(\omega)}_p[\Delta(\alpha,\theta)]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ класс функций $F(z)$, голоморфных в угловой области

$$\Delta(\alpha,\theta)=\left\{z:|\operatorname{Arg} z-\theta|<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<|z|<+\infty\right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{p,\omega}=\sup_{|\varphi-\theta|<\pi/2\alpha}\left\{\int_0^{\infty}|F(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr\right\}^{1/p}<+\infty. \tag{3}$$

Известно ([3]), что пространство $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha,0)]$ является банаховым пространством с нормой (3).

В работе ([1]) была установлена следующая теорема о параметрическом представлении класса $W^{\rho,\omega}_{p,\sigma}$ (см. также ([2]), теорему 6.13).

Теорема (М. М. Джрбашян). *Класс* $W^{\rho,\omega}_{p,\sigma}$ *совпадает с множеством целых функций* $f(z)$, *допускающих представление вида:*

$$f(z)=\int_{-\sigma^{1/\rho}}^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(izv;\mu)\,\varphi(v)v^{\mu\rho-1}\,dv, \tag{4}$$

где

$$\mu=\frac{\omega+\rho+1}{2\rho} \quad \text{и} \quad \int_{-\sigma^{1/\rho}}^{\sigma^{1/\rho}} |\varphi(v)|^2\,|v|^{\rho-1}\,dv<+\infty.$$

В той же работе было установлено обращение формулы (4).

2. В этом пункте мы даем краткое доказательство того, что класс $W^{\rho,\omega}_{p,\sigma}$ является банаховым пространством. Сначала приведем следующие две леммы.

Лемма 1. *Если* $f(z)\in W^{\rho,\omega}_{p,\sigma}$, *то:*

1. $f(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha,0)]$ и $f(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha,\pi)]$, где $\alpha=\dfrac{\rho}{\rho-1}$;

2. $f(z)e^{-\sigma(-iz)^\rho}\in H_p^{(\omega)}\left[\Delta\left(\rho,\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$ и $f(z)e^{-\sigma(iz)^\rho}\in H_p^{(\omega)}\left[\Delta\left(\rho,-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

Наметим основные моменты доказательства. Положив

$$g_a(z)=\int_{a-1}^{a}|f(rz)|^p r^\omega\,dr \quad (a>0),$$

нетрудно установить, что $\log g_a(z)$ является субгармонической функцией (см., напр. ([4])). При этом в области $\Delta(\alpha,0)\cup\Delta(\alpha,\pi)$ функция $\log g_a(z)$ оценивается следующим образом:

$$\log g_a(z)\leqslant\log\int_{a-1}^{a}e^{p\sigma(r|z|)^\rho}r^\omega\,dr\leqslant c(a)|z|^\rho.$$

Так как $\alpha=\dfrac{\rho}{\rho-1}$ $(1<\rho<2)$, то

$$|z|^{-\alpha}\log g_a(z)\to0 \text{ при } |z|\to+\infty.$$

Кроме того, функция $g_a(z)$ ограничена на лучах $\arg z=\pm\dfrac{\pi}{2\rho}$.

Из принципа Фрагмена — Линделефа для субгармонических функций (см., напр. [5], стр. 206—207) следует, что $g_a(z)$ ограниченная функция во всей области $\Delta(\alpha; 0) \cup \Delta(\alpha; \pi)$. Устремляя a к бесконечности при $z = e^{i\theta}\left(\left||\theta| - \frac{\pi}{2}\right| \geqslant \varphi > \frac{\pi}{2\rho}\right)$, получаем

$$\int_0^\infty |f(re^{i\theta})|^p r^\omega dr \leqslant M_f < +\infty,$$

откуда следует утверждение 1.

Для доказательства утверждения 2 введем вспомогательную функцию

$$\varphi(w) = f\left(w^{\frac{1}{\rho}}\right) w^{\frac{1+\omega-\rho}{\rho p}}. \tag{5}$$

Эта функция аналитична в правой полуплоскости и имеет там рост, равный $(1, \sigma)$, причем справедливо равенство

$$\int_0^\infty |\varphi(\pm iy)|^p dy = \rho \int_0^\infty \left|f\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|^p r^\omega dr \leqslant M_f < +\infty.$$

Отсюда следует включение $\varphi(iy) \in L^p(-\infty, \infty)$.

Из сказанного заключаем, что $\varphi(w)e^{-\sigma w} \in H^p$ (см. [8]). Но это утверждение эквивалентно следующему*:

$$\sup_{|\theta| < \pi/2} \left\{ \int_0^{\infty} |\varphi(re^{i\theta})|^p |e^{-\sigma p r e^{i\theta}}| dr \right\} < +\infty,$$

т. е.

$$\sup_{|\theta| < \pi/2\rho} \left\{ \int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^p |e^{-\sigma p (re^{i\theta})^\rho}| r^\omega dr \right\} < +\infty.$$

Иначе говоря,

$$f(z)\, e^{-\sigma z^\rho} \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\rho, 0)].$$

Возвращаясь к первоначальной угловой области $\Delta(\rho; \pi/2)$, заключаем, что

$$f(z) e^{-\sigma(-iz)^\rho} \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\rho; \pi/2)],$$

и аналогично

$$f(z) e^{-\sigma(iz)^\rho} \in H_p^{(\omega)}\left[\Delta\left(\rho, -\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Следующая лемма непосредственно следует из леммы 1.

Лемма 2. *Если* $f(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$, *то*

---

* Отметим, что при $p=2$ оно впервые было установлено М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном (см., напр., [1]). При любом $0 < p < +\infty$ оно в одну сторону было доказано С. А. Акопяном [8], а в другую — А. М. Седлецким [9].

1. $|f(z)| \leqslant c_1 \|f\|_{W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}}, \qquad \left| |\arg z| - \frac{\pi}{2} \right| \geqslant \varphi_0 > \frac{\pi}{2\rho};$

2. $|f(z)| \leqslant c_2 \|f\|_{W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}} e^{\rho(\sigma_0-\varepsilon)|z|^\rho}, \qquad \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho};$

3. $|f(z)| \leqslant c_3 \|f\|_{W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}} e^{\rho\sigma_0|z|^\rho}, \qquad \left| \arg z + \frac{\pi}{2} \right| \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2\rho}.$

Справедлива следующая основная теорема, доказательство которой мы наметим.

Теорема 1. *Пространство $W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}$ является банаховым пространством относительно естественной нормы*

$$\|f\|_{W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}} \overset{\text{def}}{=} \max_{1 \leqslant s \leqslant 4} \left\{ \int_0^\infty |f(re^{i\theta_s})|^p r^\alpha dr \right\}^{1/p}.$$

Действительно, пусть $\{f_k\}_1^\infty$ фундаментальная последовательность функций из класса $W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}$. Так как $f_k(re^{i\theta_s}) \in L^{p,\alpha}(0, +\infty)$ $(1 \leqslant s \leqslant 4)$ и $L^{p,\alpha}(0, +\infty)$ полное пространство, то существуют функции $f^{(s)}(re^{i\theta_s})$ из класса $L^{p,\alpha}(0, +\infty)$ такие, что

$$f_k(re^{i\theta_s}) \xrightarrow{L^{p,\alpha}(0,+\infty)} f^{(s)}(re^{i\theta_s}) \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

С другой стороны, как следует из леммы 1, $f_k(z) \in H_p^{(\alpha)}[\Delta(\rho, 0)]$ и $f_k(z) \in H_p^{(\alpha)}[\Delta(\rho; \pi)]$. Но $H_p^{(\alpha)}[\Delta(\rho; \theta)]$ является банаховым пространством, следовательно, существует функция $f(z)$ такая, что $f(z) \in H_p^{(\alpha)}[\Delta(\rho, 0)]$,

$f(z) \in H_p^{(\alpha)}[\Delta(\rho; \pi)]$ и $f_k(z) \xrightarrow{H_p^{(\alpha)}} f(z)$.

Из утверждений 2 и 3 леммы 2 следует, что

$$|f_k(z) - f_l(z)| \leqslant c_2 \|f_k - f_l\|_{W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}} e^{\rho(\sigma_0-\varepsilon)|z|^\rho}, \quad \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho};$$

$$|f_k(z) - f_l(z)| \leqslant c_3 \|f_k - f_l\|_{W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}} |z|^{-\frac{1+\alpha}{p}} e^{\rho\sigma_0|z|^\rho}, \quad \left| \arg z + \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2\rho}.$$

Отсюда получаем, что последовательность $\{f_k\}_1^\infty$ равномерно сходится на любых компактах, лежащих внутри областей $\Delta(\rho; \pi/2)$ и $\Delta\left(\rho; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Наконец, можно установить, что предельные функции последовательности $\{f_k\}_1^\infty$ являются аналитическими продолжениями друг друга, образуя при этом некоторую целую функцию, совпадающую с функциями $f^{(s)}(re^{i\theta_s})$ на лучах $\arg z = \theta_s$ $(1 \leqslant s \leqslant 4)$.

3. Существенно опираясь на лемму 2, в силу теоремы 1, устанавливается

Лемма 3. *Пусть $f(z) \in W^{p,\alpha}_{\rho,\gamma}$ и по определению*

$$\Pi_k(m, c) = \{ z : \operatorname{Re}(ze^{-i\theta_k}) > c > 0, \ |\operatorname{Im}(ze^{-i\theta_k})| \leqslant m \}.$$

Тогда

$$\left[\iint\limits_{\Pi_j(\infty,\delta)} |f(\zeta)|^p |\zeta|^\alpha d\sigma(\zeta)\right]^{1/p} \leqslant M_{p,\alpha} \|f\|_{W^{p,\alpha}_{\beta,\gamma}} \tag{6}$$

Поведение функции $f(z) \in W^{p,\alpha}_{\beta,\gamma}$ на лучах $\arg z = \theta_j$ дает следующая

Лемма 4. *Если $f(z) \in W^{p,\alpha}_{\beta,\gamma}$, то*

$$\lim_{r\to\infty} f(re^{i\theta_j}) r^{\alpha} = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant 4).$$

Проведем схему доказательства этой леммы. Пусть $\zeta = re^{i\theta_j}$ и $D_{\zeta,\delta}$ $(\delta > 0)$ — круг с центром ζ и радиусом δ. Из субгармоничности функции $|f(z)|^p |z|^\alpha$ следует, что

$$|f(\zeta)|^p |\zeta|^\alpha \leqslant \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{D_{\zeta,\delta}} |f(z)|^p |z|^\alpha d\sigma(z). \tag{7}$$

Положив $\zeta = re^{i\theta_j}$, ввиду того, что

$$D_{\zeta,\delta} \subset \Pi_j(|\zeta| - \delta, \delta),$$

имеем

$$|f(\zeta)|^p |\zeta|^\alpha \leqslant (\pi\delta^2)^{-1} \iint\limits_{\Pi_j} |f(z)|^p |z|^\alpha d\sigma(z),$$

откуда по лемме 3 следует наше утверждение.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть $f(z) \in W^{p,\alpha}_{\beta,\gamma}$ и $z_{kj} = e^{i\theta_j} k^{1/\gamma}$ $(1 \leqslant j \leqslant 4,$ $k = 1, 2, 3, \ldots)$.*

Тогда

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{\infty} |f(z_{kj})|^p k^{\frac{2+\alpha}{\gamma} - 2} \leqslant c \|f\|^p_{W^{p,\alpha}_{\beta,\gamma}}, \tag{8}$$

где $c > 0$ не зависит от f.

Действительно, пусть $\delta_k = \frac{1}{2}(|z_{k+1,j}| - |z_{kj}|)$ и D_{k,δ_k} круг с центром z_{kj} и радиусом δ_k. Записав неравенство (7) в виде

$$|f(z_{kj})|^p |z_{kj}|^\alpha \leqslant (\pi\delta_k^2)^{-1} \iint\limits_{D_{k,\delta_k}} |f(\zeta)|^p |\zeta|^\alpha d\sigma(\zeta),$$

получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_{kj})|^p |z_{kj}|^\alpha \delta_k^2 \leqslant \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \iint\limits_{D_k} |f(\zeta)|^p |\zeta|^\alpha d\sigma.$$

Ввиду того, что кружки D_{k,δ_k} $(k = 1, 2, \ldots)$ не пересекаются и при больших значениях K $\delta_k \sim \frac{k}{2} k^{\frac{1}{\gamma} - 1}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_{k,1})|^p k^{\frac{1+\omega}{\rho}-2} \leqslant c \int\int_{\Delta_1(1,\varepsilon_1)} |f(\zeta)|^p |\zeta|^\omega d\sigma \leqslant c_1 \|f\|^p_{W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}}.$$

Поскольку аналогичные неравенства, очевидно, справедливы для каждой из последовательностей $\{z_{k,j}\}$, то неравенство (8) справедливо.

Отметим одно следствие, вытекающее из теоремы 2.

Следствие. *Пусть $f(z)$ целая функция экспоненциального типа $\leqslant\pi$, для которой*

$$\|f\|^p_{p,\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^\omega dx < +\infty, \quad (\omega \in (-1,\ p-1)).$$

Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)|^p |k|^\omega \leqslant c \|f\|^p_{p,\omega}.$$

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2, при $\rho=1$.

В заключение приведем теорему, в которой устанавливается ограниченность операторов сдвига и дифференцирования в пространстве $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$.

Теорема 3. *Пусть $f(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$. Тогда:*

1. $f(z+\zeta) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$ *при любом фиксированном $\zeta \in C$, причем*

$$c_\zeta \|f\|_{W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}} \geqslant \|f(z+\zeta)\|_{W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}}.$$

2. $f'(z) \in W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$, *причем*

$$\|f'\|_{W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}} \leqslant c_1 \|f\|_{W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}}.$$

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность моему научному руководителю академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и руководство при выполнении настоящей работы.

Ереванский государственный
университет

Ս. Գ. ՌԱՖԱՅԵԼՅԱՆ

Վերջավոր աճի ամբողջ ֆունկցիաների մի դասի մասին

Աշխատանքում դիտարկվում է վերջավոր $\rho(1 \leqslant \rho < 2)$ կարգ և σ $(0 < \sigma < +\infty)$ տիպ ունեցող այն բոլոր $f(z)$ ամբողջ ֆունկցիաների համախմբությունը՝ $W^{p,\omega}_{\rho,\sigma}$ որոնց համար

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\theta_k})|^p r^\omega dr < +\infty, \quad (-1 < \omega < p-1,\quad 1 < p < +\infty),$$

որտեղ՝

$$\theta_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\theta_{3,4}=\pm\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right).$$

Ստանալով համապատասխան նորմա, ցույց է տրվում, որ $W^{p,\alpha}_{\gamma,\delta}$ դասը կազմում է Բանախի տարածություն, ինչպես նաև ստացված է այդ դասում ներդրման թեորեմ։

Վերջում բերվում է այն փաստը, որ $W^{p,\alpha}_{\gamma,\delta}$ տարածություններում դիֆերենցման և ինտեգրաշարժի օպերատորները սահմանափակ են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] М. М. *Джрбашян*, Мат. сб., 33(75), № 3 (1953). [2] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966. [3] *В. М. Мартиросян*, Изв. АН Арм. ССР, Мат., т. 13, № 5—6 (1979). [4] *Б. Я. ?евин, Ю. И. Любарский*, Изв. АН СССР, Сер. мат., т. 3, вып. 39 (1975). [5] *И. И. Привалов*, Субгармонические функции, «Наука», М., 1937. [6] *Б. Я. Левин*, Целые функции, Изд. МГУ, М., 1971. [7] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, т. 120, № 3 (1958); Сиб. мат. журн., 1, № 3 (1960). [8] *С. А. Акопян*, Изв. АН Арм. ССР, Мат., т. 1, № 2 (1967). [9] *А. М. Седлецкий*, Мат. сб., 96 (138), № 1 (1975).