ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 3

УДК 512.643.2

МАТЕМАТИКА

А. Г. Гаспарян

Приложение многомерных матриц к исследованию многочленов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 14/XII 1979)

В настоящей заметке применяется многомерно-матричный подход к исследованию корней алгебраических многочленов. Рассмотрены многомерные матрицы, определенным образом составленные из коэффициентов многочленов, и порождаемые ими детерминанты применены к вопросам о кратностях и о локализации корней. Попутно установлены неравенства, являющиеся многомерным аналогом неравенства Ньютона с взвешенными элементарными симметрическими функциями, а также получены некоторые необходимые условия знакоопределенности и знакопостоянства однородных форм высших степеней.

Вопрос о существовании корня заданной кратности был рассмотрен еще Д. Гильбертом в терминах инвариантных многочленов ([1]) (более общий результат в том же направлении содержится в ([2])).

Для детерминантов рассматриваемых матриц получены выражения, позволяющие указать нижние границы для максимума модуля корней и максимума модуля разности корней многочленов, а также верхние границы для минимумов этих величин. Оценки верхних границ максимумов и нижних границ минимумов указанных величин хорошо известны (см., например, монографию ([3])).

п°. 1. Гипердетерминанты многочленов

Каждому многочлену n-ой степени над полем комплексных чисел $a(z)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i z^{n-i}$ $(a_0\neq 0)$ поставим в соответствие систему $\{A_p\}$ $(p=2,\ldots,n)$ многомерных матриц ([1]), определяемую следующим образом: $A_p=\|a_{i_1\ldots i_p}\|$, $a_{i_1\ldots i_p}=a_{i_1+\ldots+i_p}$ $(i_1,\ldots,i_p=0,1)$. Для гипердетерминантов матриц A_p введем обозначение Δ_p.

Теорема 1. *Для гипердетерминантов* Δ_p, *соответствующих алгебраическому многочлену* $a(z)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i z^{n-i}$, *справедливы следующие формулы представления:*

$$\Delta_{2l}=\frac{(-1)^l a_0^2}{2(n)_l\binom{n}{2l}}\sum_1^n (z_{i_1}-z_{i_2})^2\ \ldots\ (z_{i_{2l-1}}-z_{i_{2l}})^2, \tag{1}$$

$$\Delta_{2l+1}=\frac{(-1)^{l+1} a_0^2}{(2l+1)(n)_l\binom{n}{2l+1}}\sum_1^n z_{i_1}(z_{i_2}-z_{i_3})^2\ \ldots\ (z_{i_{2l}}-z_{i_{2l+1}})^2, \tag{1'}$$

где суммы берутся по таким всевозможным размещениям (без повторений) из чисел $1, \ldots, n$ *по индексам* $i_1, \ldots, i_{2l}$ *(соответственно по индексам* $i_1, \ldots, i_{2l+1}$*), что порядок расположения скобок и индексов в самих скобках несущественен.*

Следствие 1. Если многочлен $a(z)$ n-ой степени ($n>1$) обладает корнем кратности m, причем $m>\left[\frac{n+1}{2}\right]$, то имеет место ряд равенств:

$$\Delta_{2(n-m+1)}=0;\quad \Delta_{2(n-m+1)+1}=0; \ldots; \Delta_n=0.$$

Следствие 2. Если все корни многочлена $a(z)=a_0\prod_1^n(z-z_i)$ вещественны ($a_0\neq 0$ и также вещественно), то $(-1)^l\Delta_{2l}\geqslant 0$, $l=1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$.

Следствие 3 (признак существования комплексных корней). Если $a(z)$—многочлен n-ой степени с действительными коэффициентами и при каком-либо $l=1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ выполняется неравенство $(-1)^l\Delta_{2l}<0$, то многочлен имеет комплексные корни.

Следствие 4. Пусть $a(z)=a_0z^4+4a_1z^3+6a_2z^2+4a_3z+a_4$—многочлен с действительными коэффициентами. Тогда, если $\Delta_4<0$, то многочлен имеет ровно два действительных и два комплексных взаимно-сопряженных корня.

п. 2. Максимальная кратность корней.

Предложение 1. Пусть все корни и коэффициенты многочлена $a(x)=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}a_ix^{n-i}$ ($a_0\neq 0$, $n>2$) действительны.

Многочлен $a(x)$ имеет корень максимальной кратности m $\left(m>\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ в том и только в том случае, если выполняются условия: $(-1)^{n-m}\Delta_{2(n-m)}>0$; $\Delta_{2(n-m+1)}=0$.

Следствие. В условиях предложения 1 максимальная кратность корней многочлена $a(x)$ равна $m\left(m > \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ в том и только в том случае, если выполняются условия:

$$(-1)^l \Delta_{2l} > 0 \text{ при любом } 1 \leqslant l < n-m \text{ и}$$

$$\Delta_{2l} = 0 \text{ при любом } n-m \leqslant l \leqslant \left[\frac{n}{2}\right].$$

Если задан многочлен $a(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^{n-i}$ с действительными коэффициентами, о котором заранее известно, что все его корни действительны, то можно вычислить максимальную кратность его корней. Предложение 1 и следствие из него позволяют дать следующий **алгоритм** для решения такой задачи:

0-й шаг. Вычислить $\Delta_{2[n/2]}$. Если $\Delta_{2[n/2]} = 0$, то имеет место цепочка соотношений

$$\Delta_{2l} = 0 \text{ при всех } n-m < l \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] \text{ и } (-1)^{n-m}\Delta_{2(n-m)} > 0,$$

из которой определяется m-максимальная кратность. Если же $(-1)^{[n/2]} \times \Delta_{2[n/2]} > 0$, перейти к следующему шагу.

i-й шаг ($i > 0$). Применить 0-й шаг к многочлену $a_i(x)$-НОД многочлена $a_{i-1}(x)$ и его производной (полагаем $a_0(x) = a(x)$). Если при этом выяснится максимум кратности корней многочлена $a_i(x)$, равный некоторому m_i, то $m = m_i + i$. В противном случае перейти к $i+1$-му шагу.

В последовательности шагов есть некоторый последний — k-й, на котором либо непосредственно выясняется искомый максимум $m = m_k + k$, либо $a_k(x) = 1$, и тогда $m_k = 0$, и, следовательно, $m = k$.

п°. 3. **Неравенства с взвешенными элементарными симметрическими функциями.**

Пусть $x_i \in R (i = 1, \ldots, n)$ и $p_k (k = 0, \ldots, n)$ — взвешенные элементарные симметрические функции чисел x_i: $p_k = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{I} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.

Известны классические неравенства Ньютона [5]:

$$|p_{r+i+j}| \leqslant 0 \quad (i, j = 0,1;\ 0 \leqslant r \leqslant n-r). \tag{2}$$

Неравенства (2) являются частным случаем более общего утверждения.

Теорема 2. *Для произвольных* $x_1, \ldots, x_n \in R$ *и фиксированных* l *и* $r\left(1 \leqslant l < \left[\frac{n}{2}\right];\ 0 \leqslant r \leqslant n-2l\right)$ *имеет место неравенство:*

$$(-1)^{l}|P_{r+i_1+\ldots+i_{2l}}^{\pm}| \geqslant 0, \quad (i_1, \ldots, i_{2l} = 0, 1). \tag{3}$$

п. 4. Необходимые условия знакоопределенности форм.

Рассмотрим однородную симметрическую форму 4-ой степени двух действительных переменных, с действительными коэффициентами $a(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} a_i \alpha^{4-i}\beta^i$. Гипердетерминант 4-мерной матрицы 2-го порядка $A = \|a_{k_1+k_2+k_3+k_4}\|$ $(k_1, k_2, k_3, k_4 = 0,1)$, называемой матрицей формы $a(\alpha, \beta)$, равен: $|A| = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$.

Теорема 3. *Гипердетерминант формы* $a(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} a_i \alpha^{4-i}\beta^i$ *положителен, если форма знакоопределенная, и неотрицателен, если она знакопостоянная.*

Более обще, рассмотрим однородную симметрическую форму 4-ой степени n действительных переменных, с действительными коэффициентами:

$$a(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1}^{n} a_{ijkl}\, x_i x_j x_k x_l.$$

Детерминант той или иной сигнатуры минорной матрицы данной матрицы A принято называть минором косигнатурного детерминанта матрицы A ([6]).

Теорема 4. *Если однородная симметрическая форма 4-ой степени действительных переменных с действительными коэффициентами знакоопределенная (знакопостоянная), то все главные миноры 2-го порядка гипердетерминанта ее матрицы положительны (соответственно неотрицательны).*

Замечание. Утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4, несправедливы для однородных форм степени $k = 2(2l+1)$ $(l \geqslant 1)$. Достаточно рассмотреть следующие две бинарные формы:

$$Q_1(x, y) = (x^2 + y^2)^{2l+1};$$

$$Q_2(x, y) = \prod_{k=1}^{2l+1} |y - (a_k + \varepsilon i)x|\, |y - (a_k - \varepsilon i)x|,$$

где $a_i \in R, a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, $\varepsilon > 0$—достаточно малое число. Обе они положительно определенные формы, хотя их гипердетерминанты—отличные от нуля числа противоположных знаков.

п. 5. Детерминанты пары многочленов.

Пусть даны два многочлена n-ой степени над полем комплексных чисел:

$$a^{(0)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i^{(0)} x^{n-i}, \quad a^{(1)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i^{(1)} x^{n-i}.$$

Составим из их коэффициентов $n+1$-мерную матрицу $A(a^{(0)}, a^{(1)}) = \|a^{(i_0)}_{i_1+\ldots+i_n}\|$ $(i_0, \ldots, i_n = 0, 1)$.

Рассмотрим детерминанты наинизшего и наивысшего родов (перманент $\overset{+}{|}A(a^{(0)}, a^{(1)})\overset{+}{|}$ и гипердетерминант $|A(a^{(0)}, a^{(1)})|$) матрицы $A(a^{(0)}, a^{(1)})$.

Лемма. *Имеет место следующая формула представления:*

$$\overset{+}{|}A(a^{(0)}, a^{(1)})\overset{+}{|} = \frac{(-1)^n a_n^{(0)} a_n^{(1)}}{n!} \operatorname{per} \| x_i^{(0)} + x_i^{(1)} \|_1^n. \qquad (4)$$

Следствие. Для гипердетерминанта матрицы $A(a^{(0)}, a^{(1)})$ справедлива следующая формула:

$$|A(a^{(0)}, a^{(1)})| = \frac{a_0^{(0)} a_0^{(1)}}{n!} \operatorname{per} \| x_i^{(0)} - x_i^{(1)} \|_1^n. \qquad (4')$$

Теорема 5. *Пусть* $a(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^{n-i}$ *и* $b(y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i y^{n-i}$ — *многочлены над* C, x^0 — μ-*кратный корень многочлена* $a(x)$ *и* y^0 — ν-*кратный корень многочлена* $b(y)$.

Тогда имеет место неравенство $\mu + \nu \leqslant n$ в каждом из следующих случаев:

1) $x^0 = y^0$; $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \neq 0$;

2) $x^0 y^0 = 1$; $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a_i b_i \neq 0$;

3) $x^0 = \overline{y^0}$; $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a_i \overline{b}_{n-i} \neq 0$;

4) $x^0 \overline{y^0} = 1$; $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a_i \overline{b_i} \neq 0$;

5) $x^0 = -y^0$; $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \neq 0$;

6) $x^0 y^0 = -1$; $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_i \neq 0$;

7) $x^0 = -\overline{y^0}$; $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i \overline{b}_{n-i} \neq 0$;

8) $x^0 \overline{y^0} = -1$; $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i \overline{b}_i \neq 0$.

Следствие. Пусть $a(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i x^{n-i}$ — многочлен над C, α — его корень кратности μ. Тогда выполняется неравенство $\mu \leqslant \left[\frac{n}{2} \right]$ во всех перечисленных ниже случаях.

1) α — любое комплексное число, n четно,

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a_i a_{n-i}\neq 0;$$

2) α — любое действительное число и $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a_i\bar{a}_{n-i}\neq 0;$

3) $|\alpha|=1$: $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}|a_i|^2\neq 0;$

4) $\alpha=\pm 1$; $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}a_i^2\neq 0;$

5) $\operatorname{Re}\alpha=0$; $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i\bar{a}_{n-i}\neq 0;$

6) $\alpha=\pm i$; $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i^2\neq 0.$

п. 6. Локализация корней многочленов.

Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — корни многочлена $a(z)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i z^{n-i}$. Введем следующие обозначения:

$$D^{(k)}=\max_{1\leqslant i,\, j\leqslant n-k}|z_i^{(k)}-z_j^{(k)}|,\quad d^{(k)}=\min_{1\leqslant i,\, j\leqslant n-k}|z_i^{(k)}-z_j^{(k)}|,$$

$$R^{(k)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n-k}|z_i^{(k)}|,\quad r^{(k)}=\min_{1\leqslant i\leqslant n-k}|z^{(k)}|,$$

где $z_1^{(k)}, \ldots, z_{n-k}^{(k)}$ — корни k-ой производной многочлена $a(z)$ (при этом $a^{(0)}(z)\overset{\text{def}}{\equiv}a(z)$).

Исходя из формул (1) и (1′) для гипердетерминантов можно получить некоторые оценки нижних границ для $D^{(k)}$ и $R^{(k)}$ и верхних границ для $d^{(k)}$ и $r^{(k)}$. Так, например, формула (1) применительно к многочлену $a^{(k)}(z)$ приводит к следующим оценкам для $D^{(k)}$ и $d^{(k)}$:

$$D^{(k)}\geqslant\max_{1\leqslant l\leqslant\left[\frac{n-k}{2}\right]}\left[\frac{2^{l+1}\binom{n-k}{l}}{\binom{2l}{l}}\left|\frac{\Delta_{2l}}{a_0^2}\right|\right]^{\frac{1}{2l}};\tag{5}$$

$$d^{(k)}\leqslant\min_{1\leqslant l\leqslant\left[\frac{n-k}{2}\right]}\left[\frac{\binom{2l}{l}}{2^{l+1}\binom{n-k}{l}}\left|\frac{W^{(k)}a_0^2}{\Delta_{2l}}\right|\right]^{\frac{1}{\binom{n-k}{2}-l}},\tag{6}$$

где Δ_{2l} — гипердетерминанты многочлена $a(z)$, $W^{(k)}$ — дискриминант многочлена $(a_0^{(k)})^{-1}a^{(k)}(z)$.

В частности, полагая в (5) и (6) $k=0$, получаем соответствующие оценки для D и d.

С помощью формулы (1′) выявляется следующая связь между величинами $R^{(k)}$ и $D^{(k)}$:

$$R^{(k)}D^{(k)^{2l}} \geqslant \frac{2^l\binom{n-k}{l}|\Delta_{2l+1}|}{\binom{2l}{l}|a_0|^2}, \tag{7}$$

$$\left(1 \leqslant l \leqslant \left[\frac{n-k}{2}\right]\right).$$

Рассмотрим матрицы более общего вида по сравнению с матрицами A_p:

$A_{r,p} = \|a_{r+i_1+\ldots+i_p}\|$ $(i_1, \ldots, i_p = 0,1)$; $0 \leqslant r \leqslant n-2$, $p = 2, \ldots, n-2)$.

Гипердетерминанты матриц $A_{r,p}$ обозначим через $\Delta_{r,p}$. В частности, $\Delta_{0,p} = \Delta_p$.

Замечая, что

$$\Delta_p((a^{(k)})'(z)) = \left(\frac{a_0^{(k)}}{a_0}\right)^2 \Delta_{n-k-p,p}(a(z)),$$

и применяя формулы (1) и (1′) к многочлену $(a^{(k)})'(z)$, приходим к другим соотношениям, связывающим $R^{(k)}$ и $D^{(k)}$:

$$R^{(k)^{2(n-k-2l)}} D^{(k)^{2l}} \geqslant \frac{2^{l+1}\binom{n-k}{l}}{\binom{2l}{l}} \left|\frac{\Delta_{n-k-2l,2l}}{a_0^2}\right|; \tag{8}$$

$$R^{(k)^{2(n-k-2l)-1}} D^{(k)} \geqslant \frac{2^{l}\binom{n-k}{l}}{\binom{2l}{l}} \left|\frac{\Delta_{n-k-2l-1,2l+1}}{a_0^2}\right|. \tag{8′}$$

Зная верхнюю границу для какой-либо из величин $R^{(k)}$ и $D^{(k)}$, с помощью (7), (8) и (8′) можно получить соответствующие нижние границы для другой. Например, если M—верхняя граница для D (некоторые оценки см. в ([3])), то из (7) следует оценка для R:

$$R \geqslant \max_{1 \leqslant l \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]} \frac{2^l\binom{n}{l}|\Delta_{2l+1}|}{\binom{2l}{l}|a_0|^2 M^{2l}}, \tag{9}$$

и обратно, если L—верхняя граница для R (оценки этой величины также см. в [3]), то

$$D \geqslant \sqrt{2}\left[\frac{\binom{n}{l}|\Delta_{2l+1}|}{\binom{2l}{l}|a_0|^2 L}\right]^{\frac{1}{2l}} \tag{10}$$

Применяя формулу (I) к многочлену $(a^{(k)})^{l}(z)$, приходим к следующему неравенству:

$$r^{(k)} \leqslant D^{(k)} \min_{1\leqslant l\leqslant\left[\frac{n-k}{2}\right]}\left[\frac{\binom{2l}{l}|a_{n-k}|^2}{2^{l+1}\binom{n-k}{l}|\Delta_{n-k-2l,\,2l}|}\right]^{\frac{1}{2l}}. \tag{11}$$

Заменяя в (11) $D^{(k)}$ на $M^{(k)}$, где $M^{(k)}$ верхняя граница для $D^{(k)}$, можно получить соответствующую верхнюю границу для $r^{(k)}$.

Пусть $a(x)$ и $b(y)$—многочлены n-ой степени над C, x_i—корни первого и y_i—корни второго многочлена ($i=1, \ldots, n$). Введем обозначения:

$$D(a, b)=\max_{i,j}|x_i-y_j|, \quad d(a, b)=\min_{i,j}|x_i-y_j|.$$

Из (4') получаются следующие оценки для этих величин:

$$D(a, b) \geqslant \left|\frac{|A(a, b)|}{a_0 b_0}\right|^{\frac{1}{n}}, \tag{12}$$

$$d(a, b) \leqslant \left|\frac{a_0 b_0 K'(a, b)}{|A(a, b)|}\right|^{\frac{1}{n(n-1)}}, \tag{13}$$

где $K(a, b)$—комутант многочленов $a_0^{-1}a(x)$ и $b_0^{-1}b(x)$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ս. ԴԱՎԳԱՐՅԱՆ

Բազմաչափ մատրիցաների կիրառումը բազմանդամների հետազոտության մեջ

Դիտարկված են բազմանդամների գործակիցներից կազմված բազմաչափ մատրիցաներ։ Այդ մատրիցաների դետերմինանտների համար ստացված են բանաձևեր և ցույց են տրված այդ բանաձևերի տարբեր կիրառությունները բազմանդամների արմատների բազմապատիկության և լոկալիզացիային վերաբերվող հարցերում։

Գլխավոր մինորների տերմիններով ձևակերպված են 4-րդ աստիճանի համասեռ ձևերի նշանա-որոշակիության անհրաժեշտ պայմանները։ Բազմաչափ

դետերմինանտների համար ստացված են անհավասարություններ, որոնք մասնավոր դեպքում ներկայացնում են Նյուտոնի հայտնի անհավասարությունները կշռյալ էլեմենտար սիմետրիկ ֆունկցիաների վերաբերյալ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. Hilbert*, Math. Annalen, 42, 313—373 (1893). [2] *Дж. Хаджиев*, Вестник МГУ, сер. математика, № 1, 1965. [3] *М. Пароди*, Локализация характеристических чисел матриц и ее приложения. Пер. с франц., ИЛ, М., 1960. [4] *Н. П. Соколов*, Пространственные матрицы и их приложения, Изд-во физ.-мат. лит., М., 1960. [5] *М. Маркус, Х. Минк*, Обзор по теории матриц и матричных неравенств, «Наука», М., 1972. [6] *Н. П. Соколов*, Введение в теорию многомерных матриц, «Наукова думка», Киев, 1972.