ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 1

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Д. О. Мурадян, Т. Э. Пилипосян

Минимальные нумерации вершин прямоугольной решетки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 28.IX 1979)

Необходимость нахождения минимальных нумераций вершин графа возникает при решении ряда задач дискретной математики. В частности, в [1] указывается необходимость нахождения минимальных нумераций вершин единичного n-мерного куба при рассмотрении некоторых задач в теории кодов и предлагается соответствующий алгоритм. В [2] изучаются некоторые свойства минимальных нумераций тора, сводя дискретную задачу к ее непрерывному аналогу. В [3] рассматриваются нумерации прямоугольной решетки, при которых минимизируется максимум абсолютных величин разностей номеров смежных вершин.

Все неопределяемые в работе понятия можно найти в монографии [4].

Пусть $G(X,U)$—граф со множеством вершин X ($|X|=N$) и множеством ребер U. Каждое взаимно-однозначное соответствие $\varphi: X\to\{1,2,\ldots,N\}$ называется нумерацией графа G, а $\varphi(x)$—номером вершины x. Множество всевозможных нумераций графа G обозначим через Φ_G.

Число $E(\varphi,G)=\sum\limits_{(x,y)\in U}|\varphi(x)-\varphi(y)|$ называется длиной нумерации φ, а число $E(G)=\min\limits_{\varphi\in\Phi_G}E(\varphi,G)$—длиной графа G. Нумерация φ_0 называется минимальной, если $E(\varphi_0,G)=E(G)$. Множество всех минимальных нумераций графа G обозначим через Φ_G^E.

Пусть $\varphi\in\Phi_G$; $C,B\subseteq X$; $C\cap B=\varnothing$; $k=\overline{1,N}$. Введем следующие обозначения:

$$\omega(C,B)=|\{(x,y)\,/\,(x,y)\in U;\ x\in C;\ y\in B\}|;$$

$$\omega(B)=\omega(B,\ X\setminus B);$$

$$A_\varphi^k=\{\varphi^{-1}(1),\ldots,\varphi^{-1}(k)\};$$

$\Delta_\varphi(B)=|\{(x,y)/(x,y)\in U;\ x\in B;\ y\notin B;\ \varphi(x)<\varphi(y)\}|-|\{(x,y)/(x,y)\in U;$
$x\in B;\ y\notin B;\ \varphi(x)>\varphi(y)\}|;$

$$\delta_\varphi(B)=\frac{\Delta_\varphi(B)}{|B|}.$$

Из ([1]) известно, что

$$E(\varphi,G)=\sum_{k=1}^{N}\omega(A_\varphi^k). \qquad (*)$$

Определение. *Множество* $A\subset X$ назовем сплошным относительно нумерации φ, если $\max\limits_{x\in A}\varphi(x)-\min\limits_{x\in A}\varphi(x)=|A|-1$.

В дальнейшем, если будет ясно, относительно какой нумерации A является сплошным, скажем, что A—сплошное.

Определение. Скажем, что множество $B\subset X$ при нумерации φ непосредственно следует за множеством $A\subset X$, если A,B—сплошные и $\min\limits_{x\in B}\varphi(x)=\max\limits_{x\in A}\varphi(x)+1$.

Определение. Скажем, что множества $A,B\subset X$ независимы друг от друга, если $\omega(A,B)=0$.

Лемма. *Если множества $A,B\subset X$ независимы друг от друга и при нумерации $\varphi\in\Phi_G^r$ B непосредственно следует за A, то*

$$\delta_\varphi(A)\leqslant\delta_\varphi(B).$$

Граф со множеством вершин $\Pi^{m,n}=\{x_{i,j}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ назовем прямоугольной решеткой (и обозначим через $P^{m,n}$), если вершины $x_{i,j}$, $x_{k,e}$ смежны тогда и только тогда, когда $|i-k|+|j-e|=1$.

Пусть $1\leqslant k\leqslant p\leqslant m$, $1\leqslant e\leqslant q\leqslant n$. Обозначим

$$\Pi_{k,e}^{p,q}=\{x_{i,j}/x_{i,j}\in\Pi^{m,n};\ k\leqslant i\leqslant p;\ e\leqslant j\leqslant q\}.$$

Определение. Множество $\Pi_{d,1}^{c,1}$ назовем открытой полустрокой (соответственно—закрытой полустрокой и i-ой строкой), если $d=1$, $c<m$ (соответственно $d>1$, $c=m$ и $d=1$, $c=m$).

Аналогично определяются открытые и закрытые полустолбцы и j-ый столбец.

Определение. Множество $A\subseteq\Pi^{m,n}$ назовем сжатым относительно вершины $x_{1,1}$ (соответственно—относительно $x_{1,n}$, $x_{m,1}$, $x_{m,n}$), если из $x_{i,j}\in A$ следует, что $\Pi_{1,1}^{i,j}\subseteq A$ (соответственно — $\Pi_{1,j}^{i,n}\subseteq A$, $\Pi_{i,1}^{m,j}\subseteq A$, $\Pi_{i,j}^{m,n}\subseteq A$).

Определение. Нумерацию $\varphi\in\Phi_{P^{m,n}}$ назовем сжатой относительно вершины $x_{1,1}$ (соответственно—относительно $x_{1,n}$, $x_{m,1}$, $x_{m,n}$), если для любого $k=\overline{1,mn}$ множество A_φ^k сжато относительно вершины $x_{1,1}$ (соответственно—относительно $x_{1,n}$, $x_{m,1}$ $x_{m,n}$).

Теорема 1. *Если $\varphi\in\Phi_{P^{m,n}}^e$, то для любого $k=\overline{1,mn}$ множество A_φ^k сжато относительно одной из вершин*

$x_{1,1}$, $x_{1,n}$, $x_{m,1}$, $x_{m,n}$.

Теорема 2. *Для каждой из вершин $x_{1,1}$, $x_{1,n}$, $x_{m,1}$, $x_{m,n}$ существует минимальная нумерация, сжатая относительно этой вершины.*

Теоремы 1, 2 можно доказать, используя идею доказательств аналогичных утверждений из ([3]) и соотношения (•).

Мы покажем, что каждая минимальная нумерация, сжатая относительно вершины $x_{1,1}$, разбивает $\Pi^{m,n}$ на подмножества A_i ($i=\overline{1,7}$), причем A_{i+1} непосредственно следует за A_i (рис. 1), и дадим структуру нумераций множеств A_i. Кроме того, опишем класс минимальных нумераций.

Теорема 3. *Пусть $n<m$. Нумерация $\varphi\in\Phi_{\Pi^{m,n}}$ минимальна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

А) *Для каждого $k=\overline{1,mn}$ A^k_φ является сжатым относительно одной из вершин $x_{1,1}$, $x_{1,n}$, $x_{m,1}$, $x_{m,n}$;*

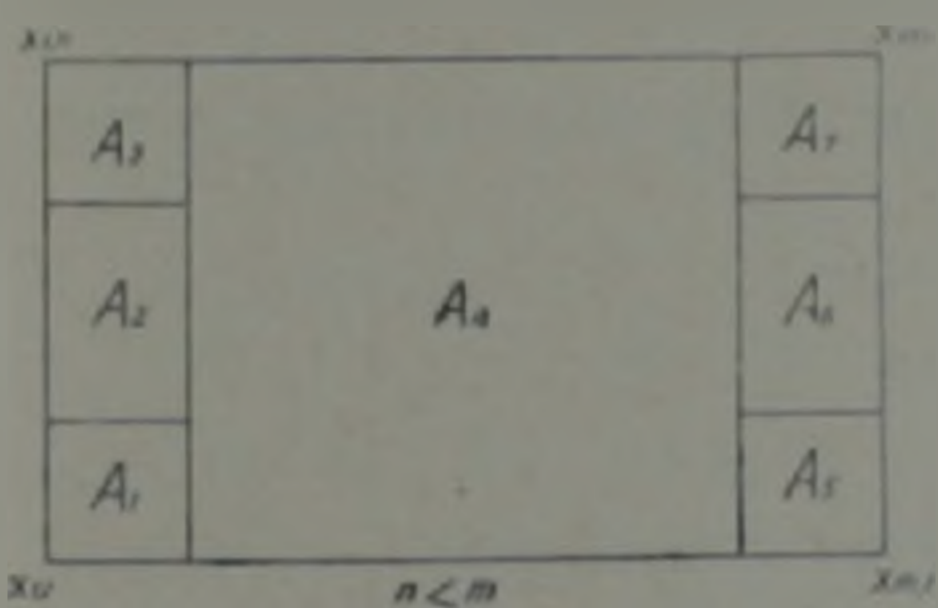

Рис 1

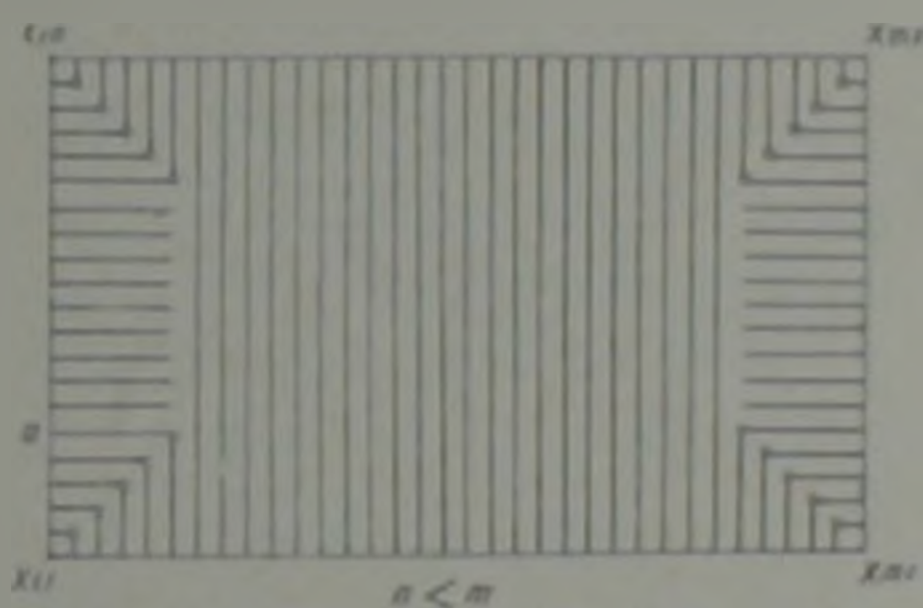

Рис. 2

Б) *Для каждого $i=\overline{1,a}$ множества $\Pi^{i,i}_{1,1}$, $\Pi^{i,n}_{1,n-i+1}$ — сплошные, причем сплошными являются также множества $\Pi^{i,i}_{i,1}$ либо $\Pi^{i,i}_{1,i}$ и $\Pi^{i,n}_{1,n-i+1}$ либо $\Pi^{i,n-i+1}_{1,n-i+1}$;*

В) *Для каждого $i=\overline{1,\bar a}$ множества $\Pi^{m,n}_{m-i+1,n-i+1}$, $\Pi^{m,i}_{m-i+1,1}$ — сплошные, причем сплошными являются также множества*

$\Pi^{m,n-i+1}_{m-i+1,n-i+1}$ *либо* $\Pi^{m-i+1,n}_{m-i+1,n-i+1}$ *и* $\Pi^{m-i+1,i}_{m-i+1,1}$ *либо* $\Pi^{m,i}_{m-i+1,i}$;

Г) *Для любых $l=\overline{a+1,n-a}$, $j=\overline{\bar a+1,n-\bar a}$, $k=\overline{a+1,m-\bar a}$ множества $\Pi^{a,l}_{1,l}$, $\Pi^{m,j}_{m-\bar a+1,j}$, $\Pi^{k,n}_{k,1}$ являются сплошными, где*

$$\left] n-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right[\leqslant a,\ \bar a\leqslant\left] n+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right[.$$

Нумерации, удовлетворяющие условиям А), Б), В), Г), изображены схематично на рис. 2. Фактически нумерация минимальна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию А) и множество вершин, лежащих на каждом отрезке, помеченном жирной линией на рис. 2, является сплошным, причем помеченные кружком принадлежат одному из смежных отрезков.

Мы приведем ряд утверждений, из которых последует справедливость теоремы 3.

Обозначим

$$X_1 = \Pi_{1,2}^{1,n-1} \bigcup \Pi_{2,1}^{m-1,1};\ X_2 = \Pi_{2,n}^{m-1,n} \bigcup \Pi_{m,2}^{m,n-1};\ X_3 = \Pi_{2,2}^{m-1,n-1}.$$

Утверждение 1. *Пусть φ минимальна, сжата относительно вершины $x_{1,1}$ и $A \subset X_3$. Тогда*

а) если $x \in X_1$ и A непосредственно следует за x, то $\{x\} \bigcup A$ — открытая полустрока, либо открытый полустолбец;

б) если $x \in X_2$ и x непосредственно следует за A, то $A \bigcup \{x\}$ — закрытая полустрока, либо закрытый полустолбец.

Следствие. *Если закрытая полустрока (закрытый полустолбец) B непосредственно следует за открытой полустрокой (открытым полустолбцом) A, то $A \bigcup B$ — строка (столбец).*

В следующих утверждениях предположим, что $\varphi \in \Phi^{l}_{P_{m,n}}$ и сжата относительно вершины $x_{1,1}$. Кроме того, положим $v = \min\limits_{x \in X_1} \varphi(x)$, $h = \varphi(x_{a+1,1})$, где a — наибольшее i, что $x_{i,1} \in A^{v}_{\varphi}$. Заметим, что номер v может получать одна из вершин $x_{2,n}$ и $x_{m,2}$.

Допустим $\varphi(x_{2,n}) = v$ и $m, n \geqslant 5$.

Утверждение 2. *Множества $\Pi_{1,1}^{2,2}$, $\Pi_{1,n-1}^{2,n}$, $\Pi_{m-1,1}^{m,2}$, $\Pi_{m-1,n-1}^{m,n}$ — сплошные.*

Утверждение 3. *$\Pi_{1,1}^{i,1}$ сплошное для каждого $i = \overline{1,a}$.*

Утверждение 4. *Для любого $x_{i,j} \in A^{v}_{\varphi}$ $i \leqslant a$.*

Утверждение 5. *Для каждого $i \leqslant n - a$, если $x_{i,n} \in A^{h}_{\varphi}$, то $\Pi_{1,n-i+1}^{i,n}$ — сплошное.*

Следствие. *Если $\Pi_{1,1}^{a,n}$ — сплошное, то $a < n/2$ и множество $\Pi_{1,n-a+1}^{a,n}$ — сплошное.*

Пусть $\bar{v} = \varphi(x_{m-1,1})$. Наибольшее i, для которого $x_{m-i+1,n-i+1} \in \Pi^{m,n} \setminus A^{\bar{v}-1}_{\varphi}$, обозначим через $\bar{a}$, и пусть $\bar{h} = \varphi(x_{m-\bar{a},n})$. Рассмотрим нумерацию $\bar{\varphi}(x) = mn + 1 - \varphi(x)$ $(x \in \Pi^{m,n})$. Ясно, что $\bar{\varphi} \in \Phi^{\varepsilon}_{P_{m,n}}$, сжата относительно вершины $x_{m,n}$ и $\min\limits_{x \in X_1} \bar{\varphi}(x) = \bar{v}$.

Применяя утверждения 2—5 и следствие утверждения 5 относительно нумерации $\bar{\varphi}$, получаем, что для любого $e = \overline{1,\bar{a}}$ $\Pi_{m-e+1,n-e+1}^{m,n}$ — сплошное и для каждого $x_{i,j} \in \Pi^{m,n} \setminus A^{\bar{v}-1}_{\varphi}$ $i > m - \bar{a}$. Кроме того, для каждого $k \leqslant n - \bar{a}$, если $x_{m-k+1,1} \in \Pi^{m,n} \setminus A^{\bar{h}}_{\varphi}$, то $\Pi_{m-k+1,1}^{m,k}$ — сплошное, и если $\Pi_{m-\bar{a},1}^{m,n}$ — сплошное, то $\bar{a} < n/2$.

Утверждение 6. $a + \bar{a} < m$.

По следствию утверждения 1 множества $\Pi_{1,1}^{a,n}$, $\Pi_{m-\bar{a}+1,1}^{m,n}$ сплошные, и для каждого $l = \overline{a+1, m-\bar{a}}$ является сплошным столбец $\Pi_{l,1}^{l,n}$. Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{a^2} w(A_{\varphi}^k) = \frac{4}{3}a^3 - \frac{a^2}{2} + \frac{a}{6};$$

$$\sum_{k=a^2+1}^{a(n-a)} w(A_{\varphi}^k) = -2a^3 + \frac{a}{2}n(n+1) - a^2;$$

$$\sum_{k=a(n-a)+1}^{na} w(A_{\varphi}^k) = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}(2n+1) + \frac{a}{6}(6n-5) - 2n;$$

$$\sum_{k=na+1}^{n(a+1)} w(A_{\varphi}^k) = n^2 - n - 1;$$

$$D(a) = \sum_{k=1}^{na} w(A_{\varphi}^k) = -\frac{a^3}{3} + a^2 n + a\left(\frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - \frac{2}{3}\right) - 2n.$$

Так как φ минимальна, то $D(a+1) \geqslant D(a) + n^2 + n - 1$ и $D(a) \leqslant D(a-1) + n^2 - n - 1$. Отсюда $\left|n - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}}\right| \leqslant a \leqslant \left|n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}}\right|$. Аналогичными рассуждениями те же оценки получаются и для $\bar{a}$, и, следовательно,

$$E(\varphi, P^{m,n}) = -\frac{2}{3}a^3 + 2na^2 - \left(n^2 + n - \frac{2}{3}\right)a + m(n^2 - n - 1) - n.$$

Заметим, что верхняя и нижняя оценки a совпадают для всех n, кроме тех случаев, когда $\sqrt{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4}}$ — целое число. В последнем случае оценки различаются на единицу, и нет разницы, какую из них взять как значение a.

Вспомним, что непосредственно перед утверждением 2 мы допустили $v = \varphi(x_{2,n})$.

Утверждение 7. $v = \varphi(x_{2,n})$ при $m > n$.

Таким образом, если $m > n \geqslant 5$, то

$$E(P^{m,n}) = -\frac{2}{3}a^3 + 2na^2 - \left(n^2 + n - \frac{2}{3}\right)a + m(n^2 - n - 1) - n.$$

Мы фактически получили, что при $m > n \geqslant 5$ минимальные нумерации, сжатые относительно вершины $x_{1,1}$, разбивают $\Pi^{m,n}$ на подмножества $A_i (i = \overline{1,7})$, как изображено на рис. 1, и дали структуру нумераций A_i. Кроме того, получили, что $|A_1| = |A_3| = a^2$ и $|A_5| = |A_7| = \bar{a}^2$. Если в случаях $n = 2,3$ рассмотреть те же нумерации, взяв $a = \bar{a} = 1$, то получим нумерацию $\varphi(x_{i,j}) = (i-1)n + j (x_{i,j} \in \Pi^{m,n})$, т. е. нумерацию столбцов, следующих друг за другом. Легко убедиться, что эта нумерация является единственной минимальной, сжатой относительно вершины $x_{1,1}$ нумерацией $P^{m,n}$ (при $n < m$ и $n \leqslant 3$). Для $P^{4,m}$

$$1 \leqslant a, \bar{a} \leqslant 2.$$

Таким образом, описан класс минимальных, сжатых относительно вершины $x_{1,1}$ нумераций графа $P^{m,n}$. Это описание и теорема 1 дают полное описание класса минимальных нумераций прямоугольной решетки (теорема 3).

Граф со множеством вершин $\Pi^{m,n}$ назовем тором, если вершины $x_{i,j}$, $x_{k,e}$ смежны тогда и только тогда, когда либо $i=k$ и $|j-e|=$ $=\begin{cases}1\\ n-1\end{cases}$, либо $j=e$ и $|i-k|=\begin{cases}1\\ m-1\end{cases}$. Тор, который фактически является декартовым произведением двух простых циклов, обозначим через $T^{m,n}$.

Поскольку $P^{m,n}$ и $T^{m,n}$ имеют одинаковое множество вершин, то для $T^{m,n}$ можно дать все те определения, что были даны для $P^{m,n}$. Более того, для тора верна следующая теорема, аналогичная теореме 2:

Теорема 4. *Для каждой из вершин $x_{1,1}$, $x_{1,n}$, $x_{m,1}$, $x_{m,n}$ существует нумерация $\varphi\in\Phi^{0}_{T^{m,n}}$, сжатая относительно этой вершины.*

Легко видеть, что для любого множества $B\subseteq\Pi^{m,n}$, сжатого относительно вершины $x_{1,1}$, $\omega_{T^{m,n}}(B)=2\,\omega_{P^{m,n}}(B)$. Отсюда и из (*) получаем

$$\Phi^{0}_{P^{m,n}}\subseteq\Phi^{0}_{T^{m,n}} \quad \text{и} \quad E(T^{m,n})=2E(P^{m,n}).$$

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Դ. Հ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, Տ. Է. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

Ուղղանկյուն ցանցի գագաթների մինիմալ համարակալումներ

Դիցուք $G(X, U)$-ն գրաֆ է X ($|X|=N$) գագաթների և U կողերի բազմությամբ։ Ամեն մի $\varphi: X\to\{1, 2, \ldots, N\}$ փոխմիարժեք համապատասխանություն կոչվում է G գրաֆի համարակալում։ Համարակալումը կոչվում է մինիմալ, եթե կից գագաթների համարների տարբերությունների բացարձակ արժեքների գումարը ամենափոքրն է։ Այդ մինիմալ գումարը նշանակվում է $E(G)$-ով։

Աշխատանքում դիտարկվում է $\{x_{i,j}\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ գագաթների բազմությամբ $P^{m,n}$ ուղղանկյուն ցանցը՝ m և n երկարությամբ երկու պարզ շղթաների դեկարտյան արտադրյալը։

$x_{1,1}$, $x_{1,n}$, $x_{m,1}$, $x_{m,n}$ գագաթներից յուրաքանչյուրի համար տրվում է այդ գագաթի նկատմամբ սեղմ համարակալման գաղափարը և ապացուցվում, որ նշված գագաթներից յուրաքանչյուրի համար գոյություն ունի մինիմալ, այդ գագաթի նկատմամբ սեղմ համարակալում։

Տրվում է $P^{m,n}$ ուղղանկյան ցանցի մինիմալ համարակալումների դասի լրիվ նկարագիրը։ Ապացուցվում է, որ այդ համարակալումները մինիմալ են և $T^{m,n}$ տորի՝ m և n երկարությամբ երկու պարզ ցիկլերի դեկարտյան արտադրյալի համար, և $E(T^{m,n}) = 2E(P^{m,n})$։ Բերվում է նաև $E(P^{m,n})$-ի հաշվման բանաձևը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. H. Harper*, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12, 1 (1964). [2] *L. H. Harper*, J. Appl. Prob., 4, 2 (1967). [3] *I. Chvatalova*, Discrete Mathematics, 11 (3,4) (1975). [4] *Ф. Харари*, Теория графов, «Мир», М., 1973.