ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 1

УДК 519.46

МАТЕМАТИКА

Ф. А. Талалян

Об инвариантных мерах на однородных пространствах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 17/IX 1979)

Настоящая работа посвящена перенесению на однородные пространства следующих фактов о мере Лебега.

Теорема (Штейнгауз [1]). *Пусть E — измеримое множество положительной лебеговой меры в R^1. Тогда разностное множество $E-E$ содержит окрестность нуля.*

Теорема (Хадвигер [2]). *Пусть E — измеримое множество положительной лебеговой меры в R^k. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и натурального числа $n>1$ существует такая окрестность нуля V, что для любого множества $A\subset V$, состоящего из n точек,*

$$m\{z\in R^k : z+A\subset E\}>(1-\varepsilon)m(E),$$

где m — мера Лебега в R^k.

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, G — локально компактная группа, действующая слева непрерывно и транзитивно в X. Предположим еще, что при любом $x\in X$ $g\to gx$ является открытым отображением G на X. Тогда говорят, что X есть однородное пространство для G. Пусть $\theta\in X$ — произвольная (в дальнейшем фиксированная) точка, G^θ — изотропная подгруппа точки θ, т. е. $G^\theta=\{g\in G : g\theta=\theta\}$, и μ_θ — левая мера Хаара группы G^θ. Согласно теореме Рисса, каждой положительной регулярной борелевской мере λ на X соответствует положительная регулярная борелевская мера μ на G такая, что

$$\int_X d\lambda \int_{G^\theta} f(gs)\,d\mu_\theta(s)=\int_G f\,d\mu \tag{1}$$

для любой непрерывной на G функции f с компактным носителем. При этом ([3], стр. 127) λ будет G-инвариантной тогда и только тогда, когда μ является левой мерой Хаара группы G.

Пусть $B, C\subset X$. Следуя [4], положим

$$B^{-1}C=U\{gC : g\in G,\ \theta\in gB\} \tag{2}$$

Заметим, что изменение выбора точки ϑ вызывает сдвиг множества $B^{-1}C$ и переход G^{ϑ} к сопряженной подгруппе. Заметим также, что в том случае, когда G действует в G как группа левых сдвигов и ϑ совпадает с единицей G, то $B^{-1}C$ приобретает обычный групповой смысл.

Всюду в дальнейшем предполагается, что изотропная подгруппа G^{ϑ} компактна и $\mu_{\vartheta}(G^{\vartheta})=1$. Тогда из условия Вейля следует, что на X существует положительная регулярная G-инвариантная борелевская мера, определенная с точностью до постоянного множителя.

Обозначим $\varphi(g)=g\vartheta$, $g\in G$. Ниже доказываются две теоремы. В теореме 1 устанавливаются некоторые свойства инвариантной меры, которые используются при доказательстве теоремы 2.

Теорема 1. *Пусть* λ *и* μ *— положительные регулярные борелевские меры соответственно на* X *и* G, *связанные соотношением* (1). *Тогда*

1) *если* $K\subset X$ *— компактное множество, то* $\varphi^{-1}(K)$ *также компактно и* $\mu(\varphi^{-1}(K))=\lambda(K)$;

2) *если группа* G σ*-компактна, то* $\mu(\varphi^{-1}(E))=\lambda(E)$ *для любого измеримого* $E\subset X$.

Доказательство. Пусть $C\subset G$ — компактное множество, такое, что $\varphi(C)=K$ ([5], стр. 28). Тогда $\varphi^{-1}(K)=CG^{\vartheta}$. Таким образом $\varphi^{-1}(K)$ является произведением компактных множеств и поэтому компактно.

Пусть, далее, χ_E — характеристическая функция множества E. Тогда в силу компактности $\varphi^{-1}(K)$ имеем $\chi_{\varphi^{-1}(K)}\in L^1(\mu)$. Отсюда, в свою очередь, следует равенство ([3], стр. 130)

$$\int\limits_X d\lambda \int\limits_{G^{\vartheta}} \chi_{\varphi^{-1}(K)}(gs)\,d\mu_{\vartheta}(s)=\int\limits_G \chi_{\varphi^{-1}(K)}\,d\mu=\mu(\varphi^{-1}(K)). \tag{3}$$

С другой стороны имеем

$$g^{-1}\varphi^{-1}(K)\cap G^{\vartheta}=\begin{cases} G^{\vartheta} & \text{если } g\vartheta\in K \\ \varnothing & \text{если } g\vartheta\notin K. \end{cases} \tag{4}$$

Действительно. Пусть $g\vartheta\in K$. Тогда $g\in\varphi^{-1}(K)$ и для любого $s\in G^{\vartheta}$ имеем $gs\vartheta=g\vartheta\in K$, откуда $gs\in\varphi^{-1}(K)$. Поэтому $s=g^{-1}gs\in$ $\in g^{-1}\varphi^{-1}(K)$, т. е. $G^{\vartheta}\subset g^{-1}\varphi^{-1}(K)$. Обратно, если $g^{-1}\varphi^{-1}(K)\cap G^{\vartheta}\neq\varnothing$, то выполняется равенство $g^{-1}t=s$, где $t\in\varphi^{-1}(K)$, $s\in G^{\vartheta}$. Тогда $g=ts^{-1}$, $g\vartheta=ts^{-1}\vartheta=t\vartheta\in K$.

Теперь, с помощью (4), левую часть равенства (3) можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_X d\lambda \int\limits_{G^{\vartheta}} \chi_{\varphi^{-1}(K)}(gs)\,d\mu_{\vartheta}(s)=\int\limits_X d\lambda \int\limits_{G^{\vartheta}} \chi_{g^{-1}\varphi^{-1}(K)}(s)\,d\mu_{\vartheta}(s)=$$
$$=\int\limits_X \mu_{\vartheta}(g^{-1}\varphi^{-1}(K)\cap G^{\vartheta})\,d\lambda=\int\limits_X \chi_K(g\vartheta)\,d\lambda=\lambda(K). \tag{5}$$

Из (3) и (5) получаем равенство $\mu(\varphi^{-1}(K))=\lambda(K)$.

Таким образом 1) доказано. Перейдем к доказательству 2).

Пусть группа G σ-компактна. Тогда имеем

$$\mu(\varphi^{-1}(E))=\sup\{\mu(C):C\subset\varphi^{-1}(E),\ C\text{—компактно}\}. \tag{6}$$

В силу доказанного утверждения 1) из (6) получим

$$\mu(C)=\mu(\varphi^{-1}(C\theta))=\lambda(C\theta)\leqslant\lambda(E) \quad \text{при} \quad C\subset\varphi^{-1}(E). \tag{7}$$

Из (6) и (7) получим

$$\mu(\varphi^{-1}(E))\leqslant\lambda(E). \tag{8}$$

С другой стороны имеем

$$\lambda(E)=\sup\{\lambda(K):K\subset E,\ K\text{—компактно}\}. \tag{9}$$

Еще раз применяя 1), из (9) получим

$$\lambda(K)=\mu(\varphi^{-1}(K))\leqslant\mu(\varphi^{-1}(E)) \quad \text{при} \quad K\subset E. \tag{10}$$

Из (9) и (10) получим

$$\lambda(E)\leqslant\mu(\varphi^{-1}(E)). \tag{11}$$

Наконец из (8) и (11) получим равенство $\mu(\varphi^{-1}(E))=\lambda(E)$.

Теорема 2. *Пусть λ—положительная регулярная G-инвариантная борелевская мера на X и μ—левая мера Хаара на G, связанная с λ соотношением (1). Пусть $E\subset X$—измеримое множество с $0<\lambda(E)<\infty$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ и натурального числа $n>1$ существует такая окрестность W точки θ, что для любого множества $A\subset W$, состоящего из n точек,*

$$\mu\{g\in G:gA\subset E\}>(1-\varepsilon)\lambda(E).$$

Доказательство. В силу регулярности меры λ можно подобрать такое компактное множество $K\subset X$, чтобы

$$K\subset E \tag{12}$$

$$\lambda(K)>\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}\lambda(E). \tag{13}$$

В силу теоремы 1 множество $\varphi^{-1}(K)$ компактно и $\mu(\varphi^{-1}(K))=\lambda(K)$. Возьмем такое открытое множество $O\subset G$, чтобы

$$\varphi^{-1}(K)\subset O,\ \mu(O)<\left(1+\frac{\varepsilon}{4n}\right)\mu(\varphi^{-1}(K)). \tag{14}$$

Далее, возьмем симметричную окрестность V единицы G, такую, чтобы выполнялись условия

$$\varphi^{-1}(K)V\subset O; \tag{15}$$

$$\Delta(g)>1-\frac{\varepsilon}{4n} \quad \text{при} \quad g\in V, \tag{16}$$

где Δ—модулярная функция группы G.

Наконец, положим $W=V\theta$. Так как $g\to g\theta$ есть открытое отображение, то W является окрестностью точки θ в X. Покажем, что построенная окрестность W является искомой. Пусть $A\subset W$, $A=\{x_1,\ldots,x_n\}$. Тогда для любого $i=1,\ldots,n$ $x_i=g_i\theta$, где $g_i\in V$ и

$$\{g\in G: gA\subset K\}=\{g\in G: gg_i\in\varphi^{-1}(K),\ i=1,\ldots,n\}=\bigcap_{i=1}^{n}\varphi^{-1}(K)g_i^{-1} \tag{17}$$

Применяя последовательно (12), (17), (15), (14), (16) и (13), будем иметь

$$\mu\{g\in G: gA\subset E\}\geqslant\mu\{g\in G: gA\subset K\}=\mu\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\varphi^{-1}(K)g_i^{-1}\Big)=$$

$$=\mu\Big(O\setminus\bigcup_{i=1}^{n}(O\setminus\varphi^{-1}(K)g_i^{-1})\Big)=\mu(O)-\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n}(O\setminus\varphi^{-1}(K)g_i^{-1})\Big)\geqslant$$

$$\geqslant\mu(O)-\sum_{i=1}^{n}\mu(O\setminus\varphi^{-1}(K)g_i^{-1})=-(n-1)\mu(O)+\sum_{i=1}^{n}\mu(\varphi^{-1}(K)g_i^{-1})=$$

$$=-(n-1)\mu(O)+\sum_{i=1}^{n}\Delta(g_i^{-1})\mu(\varphi^{-1}(K))>$$

$$>-(n-1)\left(1+\frac{\varepsilon}{4n}\right)\mu(\varphi^{-1}(K))+n\left(1-\frac{\varepsilon}{4n}\right)\mu(\varphi^{-1}(K))>$$

$$>\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(\varphi^{-1}(K))=\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda(K)>(1-\varepsilon)\lambda(E),$$

что и требовалось.

Следствие. *Если $E\subset X$ — измеримое множество с $0<\lambda(E)<\infty$, то $E^{-1}E$ содержит окрестность θ.*

Действительно. Пусть W — окрестность θ, построенная согласно теореме 2 при $n=2$. Возьмем произвольную точку $w\in W$. Тогда множество $\{g\in G: gw\in E,\ g\theta\in E\}$ имеет положительную меру и поэтому не пусто. Пусть $gw\in E$ и $g\theta\in E$ при некотором $g\in G$. Тогда $w\in g^{-1}E$ и $\theta\in g^{-1}E$. Согласно (2) это означает, что $w\in E^{-1}E$.

Ереванский государственный
университет

Ց. Ա. ԲԱԼԱՅԱՆ

Համասեռ տարածությունների վրա տրված ինվարիանտ չափերի մասին

Ապացուցվում է, որ կոմպակտ իզոտրոպ ենթախումբ ունեցող համասեռ տարածությունների վրա տրված ինվարիանտ չափերն օժտված են Լեբեգի չափի որոշ հատկություններով։ Ցույց է տրված, որ կամայական կետն ունի շրջակայք, որտեղից վերցրած կետերի վերջավոր բազմությունը կարելի է նույն ձևափոխությունով արտապատկերել տրված դրական չափի բազմության

մեջ։ Այդ ձևափոխությունների բազմության Հաարի չափի համար ստացված է ներքևից գնահատական։

Նշված արդյունքից որպես մասնավոր դեպքեր ստացվում են Շտեյնհաուզի և Հադվիգերի թեորեմները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Steinhaus*, Fund. Math., 1(1920). [2] *H. Hadwiger*, Comment. Math. Helvet., 19 (1946/47). [3] *H. Federer*, Geometric measure theory, Springer, 1969. [4] *W. W. Comfort, Hugh Gordon*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 99, No 1 (1961). [5] *А. Вейль*, Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.