

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Г. А. Попов

Об одной предельной теореме для приоритетных систем при единичной загрузке

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 20/VII 1979)

Тематика, посвященная асимптотическому изучению систем массового обслуживания в условиях загрузки, близкой или равной единице, начата Ю. В. Прохоровым ⁽¹⁾, Кнингманом ⁽²⁾ и продолжается в работах А. А. Боровкова ⁽³⁾, Иглегарта ⁽⁴⁾ и др.

Особого внимания заслуживает случай единичной загрузки. Известно, что при загрузке, равной единице, период званности π однолинейной системы с ожиданием является при довольно общих предположениях собственной случайной величиной (сл. в.). С другой стороны, при $t \rightarrow +\infty$ виртуальное время ожидания (в. в. о.) в момент t стремится при единичной загрузке к $+\infty$ ⁽⁵⁾.

Возникает вопрос об асимптотическом поведении условного в. в. о. в момент t при условии $\pi > t$, когда $t \rightarrow +\infty$. Заметим, что вероятность условия в нашем случае стремится при $t \rightarrow +\infty$ к нулю.

Рассматриваются одноканальные системы с ожиданием, с r независимыми пуассоновскими потоками $L_1, L_2, \dots, L_r$ вызовов при дисциплинах относительного приоритета и разновидностей абсолютного, описание которых можно найти в ⁽⁶⁾. Внутри каждого потока вызовов принята дисциплина *FIFO* (первым пришел — первым обслужен).

Суммарный поток 1-вызовов, ..., k -вызовов назовем потоком $\overline{1, k}$ -вызовов ($k = \overline{1, r}$). Вызовы потока L_i назовем i -вызовами ($i = \overline{1, r}$).

Длительности обслуживания вызовов из потока L_i ($i = \overline{1, r}$), интенсивность поступления которых равна $\alpha_i > 0$, не зависят от процесса поступления, независимы в совокупности и имеют функцию распределения (ф. р.) $B_i(t)$, $B_i(+0) = 0$.

Разновидности абсолютного приоритета следующие: схема В1 — дообслуживание прерванного вызова, В2 — потеря, В3 — обслуживание заново. Относительный приоритет назовем схемой А.

Пусть в момент $t = 0$, в который в системе отсутствуют вызовы,

время $u > 0$ прибор заперт для обслуживания, т. е. за $[0, u)$ вызовы накапливаются, но не обслуживаются. Обозначим через $\pi_k(u)$ первый после u момент освобождения системы от $\overline{1, k}$ -вызовов.

Пусть $\varpi_k^{(u)}(t)$ есть в. в. о. k -вызова в момент t .

Введем следующие обозначения

$$F_k(x, t) = P\{\varpi_k^{(u)}(t) < x, \pi_k(u) > t\},$$

$$R_k(x, t) = P\{\varpi_k^{(u)}(t) < x/\pi_k(u) > t\} = \frac{F_k(x, t)}{F_k(+\infty, t)},$$

$$f_k(s, \mu) = \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^\infty e^{-sx} d_x F_k(x, t) d\mu, \quad \pi_k^{(u)}(u) = M e^{-\pi_k(u)},$$

В дальнейшем используются сл. в.: k -период (π_k), kk -период (π_{kk}) и k -цикл (h_k), определения и изучение которых можно найти в (3).

Положим ($k = \overline{1, r}$; $\operatorname{Re} s \geq 0$):

$$P_k(t) = P\{\pi_k < t\}, \quad z_k = a_1 + \dots + a_k, \quad z_0 = 0,$$

$$y_{k+1}(s) = s + z_k - a_k \cdot M e^{-s z_k}, \quad y_k(s) = s + a_k - a_k \cdot M e^{-s z_k},$$

$$x_k(s) = s - a_k + a_k \cdot M e^{-s z_k},$$

где M — знак математического ожидания.

При изучении систем массового обслуживания важную роль играет загрузка системы. Под загрузкой ρ_k системы $\overline{1, k}$ -вызовами понимается среднее время, затрачиваемое из единицы времени прибора на обслуживание $\overline{1, k}$ -вызовов, поступающих в среднем за единицу времени. Как величины ρ_k ($k = \overline{1, r}$), так и величины ρ_{kk} — аналоги вторых моментов обслуживания, помноженных на интенсивности их потоков, найдены в (3).

Приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$f_k(s, \mu) = (y - x_k(s))^{-1} [e^{-\mu z_k} - e^{-\mu z_k} - 1] \quad (k = \overline{1, r}; \operatorname{Re} s \geq 0, \operatorname{Re} \mu > 0).$$

Пусть выполнено следующее условие: (1_k) в схемах А и В1 для $\beta_i(s) = \int_0^\infty e^{-st} dB_i(t)$ ($i = \overline{1, k}$) при $s \rightarrow 0$ ($\operatorname{Re} s \geq 0$) справедливо представление

$$\beta_i(s) = 1 - \beta_{i1}s + \alpha_i^{(2)}s^2(1 + O(1)) \quad (1 < i \leq 2), \quad (1)$$

где β_{i1} и $\alpha_i^{(2)}$ — константы;

в схемах В2 и В3 (1) имеет место лишь при $i = 1$.

Положим ($k = \overline{1, r}$):

$$\rho_k = 1 - \rho_{k1}, \quad \gamma_k = \min(\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{kr}), \quad B_k = \sum_{\substack{0 \leq i_1, \dots, i_r \leq \gamma_k}} a_i x_i^{(p)}.$$

Для схем В2 и В3 полагаем ($k = \overline{2, r}$): $B_k = B_1$.

Лемма 2. Для всех рассматриваемых схем при $s \rightarrow 0$ ($\operatorname{Re} s \geq 0$) имеем:

а) при $\rho_{k1} < 1$

$$\mu_{k+1}(s) = \rho_k^{-1} s - \rho_k^{-1} A^{-1} C_k s^{1+\gamma_k} (1 + o(1)),$$

$$y_k(s) = (\rho_{k-1}/\rho_k) s - \rho_k^{-1} (1 + \gamma_k) [\rho_{k-1} C_k - \rho_k C_{k-1} \chi(\gamma_k - \gamma_{k-1})] s^{1+\gamma_k} (1 + o(1)),$$

где ($i = \overline{1, k}$)

$$C_i = \begin{cases} B_i, & \text{если } \gamma_i < 2, \\ 2\rho_{i2}, & \text{если } \gamma_i = 2, \end{cases} \quad C_0 = 0,$$

а $\chi(t)$ есть функция Хевисайда

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

б) при $\rho_{k1} = 1$

$$\mu_{k+1}(s) = C_k^{-1} \gamma_k s^{1+\gamma_k} (1 + o(1)),$$

$$y_k(s) = \rho_{k-1} \cdot C_k^{-1} \gamma_k s^{1+\gamma_k} (1 + o(1)).$$

Доказательство основного результата базируется на утверждении (ср. с леммой Лебега — Римана (4)):

Лемма 3. Пусть функция $g(x, s)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $s \in [0, \infty)$ непрерывна по совокупности переменных (x, s) и пусть существует функция $f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx < +\infty, \quad \sup_{s \in [0, \infty)} |g(x, s)| \leq f(x).$$

Если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup_{s \in [0, \infty)} |g(x, s)| = 0,$$

то равномерно по $s \in [0, \infty)$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} g(x, s) dx = 0.$$

Для формулировки основных результатов положим ($k = \overline{1, r}$):

$$D_k = \rho_{k-1}^{-1} C_k^{1+\gamma_k}.$$

Теорема 1. Пусть $\rho_{k1} = 1$ и для всех рассматриваемых схем выполнены условия (1_k) . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R_k(D_k t^{2/\gamma_k} x, t) = R_k(x),$$

где $(\operatorname{Re} s \geq 0)$

$$\int_0^\infty e^{-sx} dR_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\gamma_k)} \int_0^\infty \frac{\mu^{1/\gamma_k} e^{-\mu}}{\mu + s^{1/\gamma_k}} d\mu,$$

а $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и μ есть сл. в. с $M\mu^{1+1/\gamma_k} < \infty$. Тогда утверждение теоремы 1 опять имеет место.

Следствие 2. При $r=1$ из теоремы 1 автоматически вытекает основной результат работы (7), доказанный при более сильных ограничениях, чем условия теоремы 1.

Теорема 2. а) Функция $R_k(x)$ при $\gamma_k=2$ есть распределение Рэлея

$$R_k(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^2/4), & \text{если } x \geq 0, \\ 0 & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

а при $1 < \gamma_k < 2$ ф. р. $R_k(x)$ равна

$$R_k(x) = \frac{\gamma_k}{2\Gamma(\gamma_k^{-1})} \int_0^\infty G_{\gamma_k/2}(xt^{-2/\gamma_k}) dF_k(x),$$

где

$$F_k(x) = \int_0^\infty e^{-u^{1/\gamma_k}} |1 - \cos(u^{1/\gamma_k} t)| du,$$

а $G_a(x) (0 < a < 1)$ есть стандартный положительный устойчивый закон с показателем a .

б) Момент порядка $\alpha > 0$ предельного распределения $R_k(x)$ ($k = \overline{1, r}$) имеет вид

$$\int_0^\infty x^\alpha dR_k(x) = \begin{cases} \Gamma(1 - \gamma_k^{-1}) \Gamma(m(\alpha/\gamma_k, \gamma_k^{-1}))^{-1} \frac{\sin(\pi/\gamma_k)}{\sin(\alpha\pi/\gamma_k)}, & \text{если } 0 < \alpha < \gamma_k, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq \gamma_k. \end{cases}$$

Здесь $m(\beta, a)$ момент порядка β от ф. р. $G_a(x)$.

Теорема 3. Если выполнены условия (1_k) и $\gamma_k \neq 2$, то справедливы асимптотические при $t \rightarrow +\infty$ равенства:

а) при $\rho_{k1} < 1$

$$1 - \Pi_k(t) = \frac{\rho_k^{-(\gamma_k+1)} \cdot C_k}{\pi \rho_k} |\sin(\pi/\gamma_k)| \Gamma(\gamma_k) t^{-\gamma_k} (1 + o(1)),$$

б) при $\rho_{k1} = 1$

$$1 - \Pi_k(t) = \frac{\sigma_k^{-1} C_k^{-1} \Gamma_k}{\Gamma(1 - \gamma_k^{-1})} t^{-1/\gamma_k} (1 + o(1)).$$

Ереванский государственный университет
Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՆԱՆԻԿՅԱՆ, Գ. Ա. ԳՈԳՈՎ

Լինել սահմանային բևեռների մոտին նախապայմույթությամբ համակարգերում
միավոր ծանրաբեռնվածության դեպքում

Դիտարկվում են հարաբերական և տարրերակներով բացարձակ նախա-
պայմանությամբ $\bar{M}_r[\bar{G}_r]||\infty$ համակարգեր $F/F O$ դիսցրիպլինայի դեպքում:

Դիցուք $\pi_k(u) (k = \overline{1, r}, u > 0)$ $\overline{1, k}$ — պահանջների և ուղացումով գրադ-
վածություն պարբերությունն է: Իսկ $w_k^{(u)}(t)$ -ն t պահին k -պահանջի վեր-
սույն սպասման ժամանակը: Նշանակենք

$$R_k(x, t) = P\{w_k^{(u)}(t) < x / \pi_k(u) > t\},$$

ենթադրենք տեղի ունի հետևյալ վերլուծությունը ($i = \overline{1, r}, s \downarrow 0, s > 0$)

$$\beta_i(s) = 1 - \beta_{i1}s + B_i s^{\gamma_i} (1 + o(1)) \quad (1 < \gamma_i \leq 2),$$

որտեղ $\beta_i(s)$ -ը i -պահանջի սպասարկման ժամանակի բաշխման Լապլաս-
Պատիտեսի ձևափոխությունն է: Հիմնական արդյունքը հետևյալն է:

Թեորեմ. Դիցուք առաջին k ճոսքերի գումարյալ ծանրաբեռնվա-
ծությունը հավասար է մեկի: Այդ դեպքում գոյություն ունի սահման

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_k(D_k t^{1/\gamma_k} x, t) = R_k(x),$$

որտեղ՝

$$\int_0^\infty e^{-sx} dR_k(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\gamma_k)} \int_0^\infty \frac{\mu^{1/\gamma_k} e^{-\mu}}{\mu + s^{1/\gamma_k}} d\mu, \quad \gamma_k = \min(\gamma(1), \dots, \gamma(k))$$

իսկ $\Gamma(x)$ -ը՝ Էյլերի գամմա-ֆունկցիան է:

Աշխատանքում պահված են նաև $R_k(x)$ և D_k մեծությունները:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇՈՒՄՆԵՐՆԵ

- ¹ Ю. В. Прохоров, Лит. мат. сборник, № 3, 1963 ² J. F. Kingman, The heavy traffic approximation in the theory of queues, Proc. symp. congestion theory. The Univ. of North Carolina Press, 1955. ³ А. А. Боровков, Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, «Наука», М., 1972. ⁴ D. L. Iglehart, W. Whitt, Adv. appl. prob., vol. 2, № 1 (1970); vol. 2, № 2 (1970). ⁵ Э. А. Даниелян, Изв. АН Арм. ССР. Математика, № 3, 1975. ⁶ В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2, «Мир», М., 1967, ⁷ Х. А. Арутюн, А. В. Печинкин, Труды III Всесоюзной школы-совещания по теории массового обслуживания, т. 2, МГУ, 1976.