ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXX 1980 1

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян, Н. С. Земляной

Класс предельных распределений совместного стационарного распределения времен ожидания некоторых систем $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ в условиях критической загрузки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/VII 1979)

Кингман (¹) предложил экспоненциальную аппроксимацию для стационарного распределения времени ожидания (в. о.) в системе массового обслуживания (СМО) $M|G|1|\infty$ при загрузке, приближающейся к единице слева (условие критической загрузки). Э. А. Даниелян получил аналогичные предельные теоремы сходимости к экспоненциальному распределению для СМО $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ в случае дисциплин обслуживания с относительным приоритетом (схема A) и тремя разновидностями абсолютного приоритета (схемы B: с потерей прерванного вызова, дообслуживанием, обслуживанием заново) (²). В работе (³) был поставлен следующий вопрос. В приоритетных СМО $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ только ли экспоненциальное распределение может служить в качестве предельного для стационарного распределения в. о. в условиях критической загрузки? Ответ оказался отрицательным. Для схемы B с дообслуживанием прерванного вызова в СМО $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ при $r=2$ в (³) и при $r=3$ в (⁴) получен класс предельных распределений для совместного условного стационарного распределения в. о. при критической загрузке при условии, что с момента отсчета в. о. прекращается доступ в систему вновь приходящих вызовов. Результаты даны в преобразованиях Лапласа—Стилтьеса (п. Л.—С.) и не во всех случаях обращены.

Цель настоящей работы заключается в получении класса предельных распределений для совместных безусловных стационарных распределений в. о. СМО $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ для схем A и B в условиях критической загрузки при произвольном r.

В одноканальную СМО с ожиданием поступает r независимых пуассоновских потоков вызовов. Вызовы i-го потока, называемые i-

вызовами, поступают с интенсивностью $a_i > 0$. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для i-вызовов имеют функцию распределения $B_i(t)$, $B_i(+0) = 0$. Потоки пронумерованы в порядке убывания приоритетов. Вызовы одного и того же потока обслуживаются по дисциплине FIFO.

Под загрузкой ρ_{i1} ($i=\overline{1, r}$) системы $\overline{1, i}$-вызовами понимается среднее время, требуемое для обслуживания $\overline{1, i}$-вызовов, поступающих в среднем за единицу времени. Значения как ρ_{i1}, так и величин ρ_{i2} ($i=\overline{1, r}$), имеющих смысл суммы по индексу j (от 1 до i) произведения интенсивности a_j на второй момент длительности обслуживания j-вызова, для схем A и B приведены в (^{5}). Мы говорим, что система находится в условиях критической загрузки, если $\rho = 1 - \rho_{r1} \downarrow 0$.

Пусть w_i ($i=\overline{1, r}$) — стационарное в. о. i-вызова в схемах A и B: распределения $B_i(t)$ фиксированы и ρ_{r2} конечно. Задача состоит в описании класса всех предельных распределений для вектора (w_1, ..., w_r) при $\rho \downarrow 0$.

Предполагается выполненным следующее условие:

Существуют пределы

$$c_k = \lim_{\rho\downarrow 0} s_k \quad (s_k = \rho_k/\rho_{k-1},\ \rho_k = 1-\rho_{k1},\quad k=\overline{1, r}). \qquad (*)$$

Ясно, что $0 \leqslant c_k \leqslant 1$. Из (*) следует также существование пределов

$$b_k = \lim_{\rho\downarrow 0} \rho_{k2} < +\infty.$$

Из индексов 1, 2, ..., r выделим такие и только такие индексы

$$1 \leqslant p_1 (=p) < p_2 < \ldots < p_m \leqslant r,$$

для которых $c_{p_l} = 0$ ($l=\overline{1, m}$). Без ограничения общности полагаем, что параметры первых $p-1$ потоков фиксированы.

Множество индексов ($l=\overline{1, m+1}$; $p_0 = 0$, $p_{m+1} = r+1$)

$$P_l = \{ j : p_{l-1} \leqslant j < p_l \}$$

выделяет множество потоков с индексами j, для которых $c_j > 0$ ($j \in P_l$, $j \neq p_{l-1}$). Такое разбиение индексов на группы называем разбиением (*).

Пусть $\chi(t)$ — функция Хевисайда, $\varphi(t) = \sqrt{\frac{1}{4}+t} - \frac{1}{2}$ ($t \geqslant 0$).

Для любого $j \in P_l$ ($l=\overline{2, m+1}$) определим функции λ_j и q_j

$$\lambda_{p_{l-1}} = c_{p_{l-1}} s_{p_{l-1}},\ \lambda_j = c_j \{ s_j + c_j \lambda_{j-1} + (1-c_j)\varphi(\lambda_{j-1}) \},$$

$$\tilde{s}_{p_{l-1}} = s_{p_{l-1}} + \varphi(\lambda_{p_{l-1}-1})\chi(c_{p_{l-1}-1}),$$

$$q_{p_{l-1}} = (1-c_{p_{l-1}})\varphi(\lambda_{p_{l-1}}),\ q_j = (1-c_j)\varphi(\lambda_j) + c_j^2 q_{j-1},$$

$$q_{p_{l-1}} = -t_{p_{l-1}}(1-t\ \ ) + q_{p_{l-1}+1}\chi(c_{p_{l-1}+1}),$$

с помощью которых задается функция γ_l

$$\gamma_{p_l-1} = \frac{c_{p_l-1}\varphi(t_{p_l-1})}{\varphi(t_{p_l-1})-\varphi(q_{p_l-1})}, \qquad \gamma_l = c_l\frac{\varphi(t_l)-\varphi(q_{l+1})}{\varphi(t_l)-\varphi(q_l)},$$

$$\gamma_{p_l-1} = \{1 + t_{p_l-1} + \varphi(q_{p_{l-1}+1})\chi(c_{p_{l-1}+1})\}^{-1}.$$

Наконец положим $(j=\overline{1,r})$

$$\overset{*}{w}_j = w_j[\chi(p-j) + \chi(j+1-p)Mw_j]^{-1},$$

где M—знак математического ожидания.

Теорема 1. *Пусть $\rho\downarrow 0$, имеют место условие (*) и разбиение (*). Тогда существует предел*

$$\lim_{\rho\downarrow 0} P\{\overset{*}{w}_j < x_j(j=\overline{1,r})\} = P\{w_j < x_j(j=\overline{1,p-1})\}\prod_{n=2}^{m+1}\lim_{\rho\downarrow 0}P\{\overset{*}{w}_j < x_j(j\in P_n)\},$$

где первый сомножитель правой части равенства есть совместное стационарное распределение $W(x_1,\ldots,x_{p-1})$ вектора $(w_1,\ldots,w_{p-1})$ в рассматриваемых СМО только с первыми p потоками при $\rho_{p1}=1$, а предельное распределение случайных величин $\overset{*}{w}_j$ группы P_n $(n=\overline{2,m+1})$ имеет многомерное п. Л.—С. $\prod_{l\in P_n}\gamma_l$.

Дадим качественное описание этой предельной теоремы. Пусть

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} x, & \text{для схемы A},\\ y, & \text{для схем B},\end{cases}$$

тогда (см. (²))

$$Mw_l = \frac{\alpha(\rho_{l2},\rho_{l2})}{\rho_{l-1}\rho_l},$$

откуда следует, что Mw_l при $\rho\downarrow 0$ ограничено, если $i<p$ и стремится к бесконечности при $l\geqslant p$.

По неравенству Чебышева: $P|w_k>\varepsilon|<\varepsilon^{-1}Mw_k$ $(\varepsilon>0)$, можно заключить, что при $\rho\downarrow 0$ случайная величина w_k $(k=\overline{1,p-1})$ является собственной, чем и объясняется отсутствие нормировки в. о. группы P_1 в предельной теореме. А для w_k при $k\geqslant p$ и $\rho\downarrow 0$ естественной нормировкой служит Mw_k.

Условие (*) и разбиение (*) задают следующее иерархическое при $\rho\downarrow 0$ распределение загрузки ρ_{l1} среди групп P_n $(n=\overline{1,m+1})$. Загрузка $\rho(P_1)$, отвечающая группе потоков P_1, составляет определенную часть ρ_{l1}. Она меньше единицы и поэтому потоки группы P_1 не находятся в условиях критической загрузки. Оставшаяся часть $\rho_{l1}-\rho(P_1)$ есть сумма $\rho(P_2)+\ldots+\rho(P_{m+1})$, где $\rho(P_n)$—суммарная загрузка системы k-вызовами $(k\in P_n,\ n>1)$. Причем первый поток каждой группы $\boldsymbol{P}_n$ $(n>1)$ и только он характеризуется тем, что загрузка α_n системы вызовами этого потока составляет „существенную" часть остатка $1-[\rho(\boldsymbol{P}_1)+\ldots+\rho(\boldsymbol{P}_{n-1})]$. Таким образом α_n составляет главную часть $\rho(\boldsymbol{P}_n)$ $(n>1)$. Вспомним, что загрузка системы k-вызовами есть стационарная вероятность того, что обслуживается k-вызов. Из сказанного следует, что каждый вызов потока группы $\boldsymbol{P}_n$ $(n>1)$ по отношению к вызовам потоков группы $\boldsymbol{P}_{n-1}$ находится в условиях критической загрузки „более высокого порядка". В частности поток с номером p является первым потоком, находящимся в условиях критической загрузки.

Теперь приведем простые соображения в пользу установленной в теореме асимптотической независимости при $\rho\downarrow 0$ совместных распределений нормированных в. о. вызовов из разных групп.

Обозначим π_i — математическое ожидание длительности ll-периода $(i=\overline{1,r})$ (см. (3)). Математическое ожидание той части w_i $(i=\overline{p,r})$, которая определяется величиной w_{i-1}, равно:

$$Mw_{i-1}(1+a_{i-1}\pi_{i-1})=\pi_{i-1}^{-1}Mw_{i-1}.$$

Отсюда и из формулы для Mw_i следует, что математическое ожидание указанной составляющей, которая пронормирована величиной Mw_i, в пределе при $\rho\downarrow 0$ равно нулю, если $c_i=0$. В противном случае $(c_i>0)$ вклад в Mw_i величины w_{i-1} в пределе при $\rho\downarrow 0$ имеет порядок Mw_i.

Итак, обращению подлежат п. Л.—С. распределений, соответствующих каждой отдельной группе $\boldsymbol{P}_n$ $(n=\overline{1,m+1})$.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 при $c_i=0$ $(i=\overline{1,r})$

$$\lim_{\rho\downarrow 0}\mathrm{P}\{\mathring{w}_j<x_j\ (j=\overline{1,r})\}=\prod_{j=1}^{r}E(x_j).$$

Здесь

$$E(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Приведем полное обращение п. Л.—С. предельных распределений в случае $r=3$, чему предпошлем обозначения.

Пусть $(x,\ y,\ z\geq 0,\ a,\ b\in(0,1))$

$$D(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{u=0}^{x}\int\limits_{v=0}^{y}uv^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{u}{2}-\frac{v}{4}-\frac{u^2}{4v}\right\}du\,dv,$$

$$B_a(x,y)=\frac{\sqrt{a(1-a)}}{4\pi}\int\limits_{t=0}^{x}\int\limits_{w=0}^{y}tw^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{\frac{t(2a-1)}{4(1-a)}-\frac{w}{4a}\right\}.$$

$$\int_{u=t}^{\infty} u(u-t)^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{u(1-2a)}{4(1-a)} - \frac{u^2 a}{4w} - \frac{t^2(1-a)}{4(u-t)}\right\} du\, dt\, dw.$$

$\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью распределения

$$g_a(t) = \chi(t)\sqrt{\frac{2}{\pi(1-a)}}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{2(1-a)}} - \frac{1}{2(1-a)}\int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} e^{-\frac{v}{2(1-a)}} dv\right)$$

$\nu \geqslant 0$ — целочисленный индекс, не зависящий от $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$, имеющий геометрическое распределение: $P\{\nu = k\} = a(1-a)^k$ $(k \geq 0)$.

Обозначим $\Phi_a(t) = P\{\xi_1 + \ldots + \xi_\nu < t\}$ и

$$\Omega_a(y) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^y u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{4u}} \int_0^{\infty} v e^{v - \frac{av^2}{u}} d\Phi_a(v)\, du.$$

На основе обозначений

$$\tau_{a,b}(y,z) = \chi(z - aby)\exp\left\{\frac{y}{4}\left(2 - a - \frac{1}{a}\right) - \frac{z}{4b}\right\}(ab)^{-1},$$

$$\zeta_a(y,z) = \chi(z - ay)\psi(y(1-a),\ z - ay)\exp\left\{\frac{y(2-a)-z}{4}\right\},$$

$$\psi(y,z) = \frac{y}{2z\sqrt{\pi z}}\exp\left(-\frac{y^2}{4z}\right),$$

функции U_a, S_a, C_a, $G_{a,b}$, $Q_{a,b}$ определяются равенствами

$$\frac{\partial^2 U_a(y,z)}{\partial y\, \partial z} = \zeta_a(y,z)\frac{d\Omega_a(y)}{dy}, \qquad \frac{\partial^3 S_a(x,y,z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \zeta_a(y,z)\frac{\partial^2 B_a(x,y)}{\partial x\, \partial y},$$

$$\frac{\partial^3 C_a(x,y,z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = a^{-1}\chi(z - ay)\psi(x,y)\exp\left\{-\frac{z}{4a}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 G_{a,b}(y,z)}{\partial y\, \partial z} = \tau_{a,b}(y,z)\int_0^{\infty}\psi\left(y(1-a) + w(1-b),\ \frac{z}{b} - ay\right)\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{w(1-2b)}{4}\right\}\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{v(1+a)}{2a}\right\}\psi\left(\frac{v}{a}, \frac{y}{a}\right)\psi(v,w)\, dv\, dw,$$

$$\frac{\partial^2 Q_{a,b}(x,y,z)}{\partial y\, \partial z} = \tau_{a,b}(y,z)\int_0^{\infty}\exp\left\{\frac{w(1-2a+2a^2(1-b))}{4}\right\}\psi(x,w)\cdot$$

$$\psi\left(a^2(1-b)w + (1-a)y,\ \frac{z}{b} - ay\right)\int_0^{y/a}\psi(x,v)\psi\left(w(1-a),\ \frac{y}{a} - v\right)dv\, dw.$$

Теорема 2. Задаваемое теоремой 1 предельное распределение в случае трех входящих потоков для схем A и B имеет вид ($x_i \geqslant 0$, $x^{(i)} = (x_1, \ldots, x_i)$, $i = \overline{1, 3}$; $a, b \in (0, 1)$):

$$F(x^{(3)}) = \begin{cases} (B_a \overset{2}{*} \Omega_a(x^{(2)})) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 = c_3 = 0, \; c_2 = a, \\ D(x_1, x_2) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 = c_3 = 0, \; c_2 = 1, \\ W(x_1) \cdot (B_a \overset{3}{*} \Omega_a(x_2, x_3)), & \text{если } c_1 \neq 0, \; c_2 = 0, \; c_3 = a, \\ W(x_1) \cdot D(x_2, x_3), & \text{если } c_1 \neq 0, \; c_2 = 0, \; c_3 = 1, \\ E(x_1) \cdot (B_a \overset{3}{*} \Omega_a(x_2, x_3)), & \text{если } c_1 = c_2 = 0, \; c_3 = a, \\ E(x_1) \cdot D(x_2, x_3), & \text{если } c_1 = c_2 = 0, \; c_3 = 1, \\ D(x_1, \min(x_2, x_3)), & \text{если } c_1 = 0, \; c_2 = c_3 = 1, \\ S_a \overset{2}{*} \overset{3}{*} U_a(x^{(3)}), & \text{если } c_1 = 0, \; c_2 = a, \; c_3 = 1, \\ C_a \overset{3}{*} \Omega_a(x^{(3)}), & \text{если } c_1 = 0, \; c_2 = 1, \; c_3 = a, \\ Q_{a,b} \overset{2}{*} \overset{3}{*} G_{a,b} \overset{3}{*} \Omega_b(x^{(3)}), & \text{если } c_1 = 0, \; c_2 = a, \; c_3 = b, \\ W(x_1) \cdot E(x_2) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 \neq 0, \; c_2 = c_3 = 0, \\ W(x_1, x_2) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 \neq 0, \; c_2 \neq 0, \; c_3 = 0, \\ E(x_1) \cdot E(x_2) \cdot E(x_3), & \text{если } c_1 = c_2 = c_3 = 0, \end{cases}$$

где $\overset{i}{*}$ означает свертку по x_i ($i = 2, 3$).

Доказательство теоремы 1 основано на получаемых введением дополнительных событий п. Л.—С. распределений вектора ($w_1, \ldots, w_r$) при фиксированной загрузке $\rho_r < 1$. В соответствии с теоремой 1 производится нормировка параметров этих п. Л.—С. и совершается предельный переход, когда $\rho \downarrow 0$. При этом проводятся асимптотические разложения, которые базируются на приводимых ниже важных (и не только в нашем случае) разложениях в окрестности нуля функций μ_{k+1}, y_k, ν_k ([5]).

Теорема 3. *Пусть* $\rho \downarrow 0$ *и выполнено условие* (*).

Тогда ($\operatorname{Re} s > 0$):

1) при $c_k = 0$ $(k = \overline{p, r})$

$$(\tilde{v}_k / \rho_{k-1}) - \mu_k(\tilde{v}_k) \sim \sigma_k \rho_k b_{k-1} s^2,$$

$$\nu_k(\tilde{v}_k) \sim \rho_k^2 (s + b_p s^2),$$

$$y_{k-1}(\tilde{v}_k) \sim s \rho_{k-1} \rho_k;$$

2) при $c_k = 0$, $c_{k+1} \neq 0$ $(k = \overline{p, r})$

$$\mu_{k+1}(v_k) \sim \rho_k \lambda(s),$$

$$v_k - \nu_{k+1}(v_k) \sim \rho_k^2 (1 - a_{k+1}) \lambda(s),$$

$$y_k(v_k) \sim \rho_{k-1}\rho_k\Lambda(s);$$

3) при $c_k \neq 0$, $c_{k+1} = 0$ $(k=\overline{p+1, r})$ вид разложений для μ_{k+1} и ν_{k+1} сохраняется (см. 2)), а

$$y_k(v_k) - v_k \sim \rho_{k-1}\rho_k(1-z_k)\Lambda(s),$$

причем в 2) и 3) вид разложений для $y_k(v_k)$ сохраняется и при $c_{k+1}=0$ $(k=\overline{p, r})$.

Здесь обозначено $(k=\overline{p, r})$:

$$\xi_k \sim \rho_{k-1}\rho_k, \quad v_k \sim s\rho_{k1}^2, \quad \Lambda(s) = b_p^{-1}\varphi(sb_p).$$

Доказательство этой теоремы проводится рекуррентно.

При доказательстве теоремы 2 используется формула обращения (23.91) из [8].

Ереванский государственный университет
Ереванский НИИ математических машин

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Ն. Ս. ՉԻՏԻՅԱՆՑ

Որոշ $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ համակարգերում սպասման ժամանակների համատեղ բաշխման սահմանային բաշխումների դասը կրիտիկական ծանրաբեռնվածության դեպքում

Դիտարկվում են հարաբերական նախապատվությամբ և բացարձակ տարբերակներով $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ *զանգվածային սպասարկման համակարգեր:*

Նշանակենք ω_k*-ով* $(k=\overline{1, r})$ k*-պահանջի սպասման ստացիոնար ժամանակը* FIFO *սպասարկման դիսցիպլինայի դեպքում, իսկ* ρ_k*-ով* $\overline{1, k}$*-պահանջներով համակարգի ծանրաբեռնվածությունը:*

Դիտարկվող բոլոր համակարգերի համար աշխատանքում ներմուծված են ρ_{k2} $(k=\overline{1, r})$ *մեծությունները, որոնք հանդիսանում են ֆունկցիաներ* $\overline{1, k}$*-պահանջների սպասարկման ժամանակների առաջին երկու մոմենտներից:*

Ենթադրվում է հետևյալ սահմանների գոյությունը՝

$$c_k = \lim_{\rho_{r1}\uparrow 1} \frac{1-\rho_{k1}}{1-\rho_{k-1,1}}, \qquad \lim_{\rho_{r1}\uparrow 1} \rho_{k2} < \infty.$$

Դիցուք $c_1, c_2, \ldots, c_r$ *թվերի շարքում* c_{p_i} *թվերը* $(i=\overline{1, m};\ m=\overline{1, r})$ *և միայն նրանք հավասար են զերոյի:*

Նշանակենք $(u=\overline{1, m};\ p_{m+1}-1=r)$

$$x^{(u)} = (x_{p_u}, \ldots, x_{p_{u+1}-1}), \quad x^{(0)} = (x_1, \ldots, x_{p_1-1}).$$

Թեորեմ: Բոլոր դիտարկվող համակարգերի համար գոյություն ունի սահման

$$\lim_{\rho_{r1}\uparrow 1} P\{\varpi_i < x_i,\ \varpi_j < x_j M\varpi_j\ (i=\overline{1,\ p_1-1};\ j=\overline{p_1,\ r})\} = \prod_{u=0}^{m} S_u(x^{(u)}),$$

որտեղ $S_u(x^{(u)})$-ները՝ բազմաչափ բաշխման ֆունկցիաներ են:

Ընդհանուր դեպքում գտնված են $S_u(x^{(u)})$-*երի* ($u=\overline{0,\ m}$) *Լապլաս-Ստիլտեսի ձևափոխությունները: Մասնավոր* $r=3$ *դեպքում ստացված են հենց այդ բաշխման ֆունկցիաները:*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. F. C. Kingman*, Proc. Camb. Phil. Soc., 57 (1961). [2] *Б. В. Гнеденко и др.*, Приоритетные системы обслуживания, Изд. МГУ, М., 1973. [3] *Т. А. Азларов, Я. М. Хусаинов*, Изв. АН Уз. ССР, сер. физ.-мат. наук, № 6 (1974). [4] *Я. М. Хусаинов*, О предельных распределениях для длительности времени ожидания приоритетных систем в условиях большой загрузки, Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 окт. 1977 г., 4106—77 Деп. [5] *Э. А. Даниелян*, Изв. АН Арм. ССР, сер. мат., т. 10, № 3 (1975). [6] *В. А. Диткин, А. П. Прудников*, Справочник по операционному исчислению, «Высшая школа», М., 1965.