ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 5

УДК 515.1

МАТЕМАТИКА

С. А. Антонян

Классификация бикомпактных G-расширений с помощью колец эквивариантных отображений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 12/XI 1979)

В работе устанавливается каноническое взаимно-однозначное соответствие между множеством всех бикомпактных G-расширений данного тихоновского G-пространства X (G—бикомпактная группа) и множеством всех замкнутых инвариантных подколец кольца $E(X, C(G))$, разделяющих точки и замкнутые множества пространства X, где $E(X, C(G))-G$ —кольцо всех таких эквивариантных отображений $f: X \to C(G)$, для которых замыкание образа $\overline{f(X)}$ —бикомпактно (теорема 3). Но, как показал де Врис ([1], стр. 211), существование бикомпактного G-расширения у тихоновского G-пространства X эквивалентно ограниченности G-пространства X (даже в случае произвольной группы G). Таким образом, в случае, когда G—бикомпактная группа, нами, в частности, получено более простое и естественное доказательство леммы де Вриса ([2]) об ограниченности любого тихоновского G-пространства. Теорема 6 непрерывные действия на бикомпактных пространствах „сводит“ к линейным действиям на кольцах функций.

Напомним необходимые определения.

1. Действием группы G* на множестве X называют всякое отображение $(g, x) \to gx$ декартова произведения $G \times X$ в множество X, удовлетворяющее условиям:

A) $ex = x$;

B) $(gh)x = g(hx)$

для единицы e группы G и для любых $g, h \in G$, $x \in X$.

2. Если G—группа, а X—линейное пространство, то действие gx называют линейным, если выполнено условие

C) $g(\lambda x + \mu y) = \lambda gx + \mu gy$

для любых $g \in G$, любых скаляров λ и μ и любых $x, y \in X$.

* Группой всюду будем называть мультипликативную группу G.

3. Если G — группа, а (X, ρ) — метрическое пространство, то действие gx называют изометрическим, если выполнено условие

D) $\rho(gx, gy)=\rho(x, y)$

для всех $g \in G$, $x, y \in X$.

4. Если G — топологическая группа, а X — топологическое пространство, то действие $(g, x) \to gx$ называют непрерывным, если оно непрерывно как отображение топологического произведения $G \times X$ в топологическое пространство X.

5. Если на множествах X и Y действует группа G, то отображение $f: X \to Y$ называют G отображением, если оно коммутирует с данными действиями, т. е. если $f(gx)=gf(x)$ для всех $x \in X$, $g \in G$.

6. Если на множестве X действует группа G, то множество $A \subset X$ называют инвариантным или G-множеством, если $ga \in A$ для всех $a \in A$, $g \in G$.

7. Пространство X* с фиксированным на нем действием группы G* называют G-пространством. Ясно, что каждое инвариантное множество A G-пространства X само является G-пространством, если его рассматривать с ограничением действия группы G на A. Непрерывное G-отображение $f: X \to Y$ G-пространств будем называть эквивариантным отображением. Для краткости эквивариантный гомеоморфизм будем называть эквиморфизмом.

8. Бикомпактным G-расширением данного G-пространства X называют пару (f, Y), где Y — бикомпактное G-пространство, а f эквиморфизм пространства X на всюду плотное подпространство пространства Y. На множестве всех бикомпактных G-расширений данного G-пространства X естественным образом можно определить отношение порядка по такому правилу: $(f, Y) \geqslant (\varphi, Z)$ тогда и только тогда, когда существует такое эквивариантное отображение $\psi: Y \to Z$, что $\psi \cdot f=\varphi$. Если в качестве ψ можно взять эквиморфизм, то G-расширения (f, Y) и (φ, Z) называются эквивариантно эквивалентными.

Легко проверить, что множество всех бикомпактных G-расширений произвольного G-пространства X частично упорядочено отношением $\geqslant$. Если (f, Y) и (φ, Z) — его хаусдорфовы бикомпактные G-расширения и $(f, Y) \geqslant (\varphi, Z) \geqslant (f, Y)$, то G-расширения (f, Y) и (φ, Z) эквивариантно эквивалентны. Далее, если не оговорено противное, всегда будем считать, что G — бикомпактная группа.

Через $C(G)$ будем обозначать кольцо всех непрерывных функций $f: G \to R$, рассматриваемое в норме супремума, т. е. $\|f\|=\sup\limits_{t \in G}|f(t)|$, для $f \in C(G)$. Легко доказывается следующая

Лемма 1. *На кольце $C(G)$ определяются два непрерывных линейных изометрических действия согласно формулам:*

E) $(g, f) \to gf$; $(gf)(x)=f(xg)$ и

F) $(g, f) \to g * f$; $(g * f)(x)=f(g^{-1}x)$,

где $g, x \in G$, $f \in C(G)$.

* Начиная с этого момента пространством будем называть топологическое пространство, а группой — топологическую группу.

В дальнейшем под обозначениями $C(G)$ и $C(G)^*$ всегда будем понимать кольцо $C(G)$, рассматриваемое как G-пространство с непрерывными действиями соответственно E) и F).

Пусть X произвольное G-пространство. Через $E(X, C(G))$ обозначим множество всех таких эквивариантных отображений $f: X \to C(G)$, что замыкание $\overline{f(X)}$ образа $f(X)$ бикомпактно.

Ясно, что поточечно определенные алгебраические операции и норма супремума превращают $E(X, C(G))$ в полное нормированное кольцо с единицей.

Лемма 2. *На кольце $E(X, C(G))$ определяется непрерывное линейное изометрическое действие группы G согласно формуле*

G) $(g, f) \to gf;\quad (gf)(x) = g * f(x)$,

где $g \in G$, $x \in X$ и $f \in E(X, C(G))$.

Доказательство—простая проверка.

Следующая теорема является ключевой.

Теорема 1. *Пусть X тихоновское G-пространство. Тогда для каждой точки $x \in X$ и каждого несодержащего точку x замкнутого (но необязательно инвариантного) в X множества F существует такое отображение $f \in E(X, C(G))$, что $f(x) \notin \overline{f(F)}$.*

Определение. *Пусть X произвольное G-пространство, а K—произвольное инвариантное подкольцо G-кольца $E(X, C(G))$. Множество Δ всех таких ненулевых эквивариантных гомоморфизмов $\pi: K \to C(G)^*$, что $\pi(f) \in \overline{f(x)}$, наделенное топологией поточечной сходимости, будем называть структурным пространством для K. Преобразование Фурье $\hat{f}$ произвольного элемента $f \in K$ определяется формулой $\hat{f}(\pi) = \pi(f)$ для всех $\pi \in \Delta$.*

Лемма 3. *На структурном пространстве Δ определяется непрерывное действие группы G согласно формуле*

H) $(g, \pi) \to g * \pi;\quad (g * \pi)(f) = g * \pi(f)$

для всех $g \in G$, $\pi \in \Delta$ и $f \in K$.

Доказательство—простая проверка.

В дальнейшем структурное пространство Δ всегда будет рассматриваться как G-пространство с непрерывным действием H).

Теорема 2. *Пусть X тихоновское G-пространство, K—произвольное замкнутое инвариантное подкольцо G-кольца $E(X, C(G))$, а Δ — его структурное пространство. Тогда*

a) *пространство Δ хаусдорфово и бикомпактно;*

b) *преобразование Фурье есть эквивариантный изоморфизм G-кольца K на G-кольцо $E(\Delta, C(G))$.*

Пусть (i, Q) — некоторое бикомпактное G-расширение G-пространства X. Для простоты будем считать, что X является всюду плотным инвариантным подмножеством G-пространства Q.

Рассмотрим G-кольцо $E(Q, C(G))$. Так как сужение каждого эквивариантного отображения $f: Q \to C(G)$ на G-пространстве X является элементом G-кольца $E(X, C(G))$ и $\operatorname{Sup}_{t \in Q} \|f(t)\| = \operatorname{Sup}_{x \in X} \|f(x)\|$, то $E(Q, C(G))$, рассматриваемое как G-кольцо эквивариантных отображений из X в $C(G)$, есть замкнутое инвариантное подкольцо G-кольца $E(X, C(G))$. Естественно поставить вопрос, какими внутренними свойствами выделяются эти подкольца $E(Q, C(G))$ среди всех подколец G-кольца $E(X, C(G))$. Ответ на этот вопрос дает следующая классификационная

Теорема 3. *Пусть X тихоновское G-пространство. Тогда подкольца G-кольца $E(X, C(G))$ вида $E(Q, C(G))$, где Q —произвольное бикомпактное G-расширение G-пространства X, могут быть охарактеризованы как произвольные замкнутые инвариантные подкольца K G-кольца $E(X, C(G))$, удовлетворяющие условию*

1) *для каждой точки $x \in X$ и каждого несодержащего точку x замкнутого в X множества F существует такое отображение $f \in K$, что $f(x) \notin \overline{f(F)}$.*

В случае тривиальной группы G из теоремы 3 мы получаем известную классификацию обычных бикомпактных расширений с помощью колец ограниченных функций (см. например ([3]), стр. 251).

Теорема 4. *Пусть X тихоновское G-пространство, а M— структурное пространство G-кольца $E(X, C(G))$. Если отображение $j: X \to M$ определено формулой $j(x)(f) = f(x)$ для всех $x \in X$, $f \in E(X, C(G))$, то пара (j, M) является максимальным (в смысле частичного порядка $\geqslant$ из пункта 8) бикомпактным G-расширением G-пространства X.*

Заметим, что теорема 4 обобщает результат Пале (([4]), стр. 24), который в случае, когда G—компактная группа Ли, впервые установил существование максимального G-расширения.

Теорема 5. *Каждое из следующих двух условий необходимо и достаточно для того, чтобы бикомпактное G-расширение Q тихоновского G-пространства X было эквивариантно эквивалентным максимальному бикомпактному G-расширению M:*

1) *любое эквивариантное отображение $f: X \to C(G)$, для которого $\overline{f(X)}$—бикомпактно, может быть продолжено в эквивариантное отображение $\bar{f}: Q \to C(G)$;*

2) *любое эквивариантное отображение $f: X \to B$ G-пространства X в G-бикомпакт B может быть продолжено в эквивариантное отображение $\bar{f}: Q \to B$.*

Пусть G—любая группа.

Для каждого G-пространства X через $C(X)$ обозначим кольцо (без топологии) всех непрерывных функций $f: X \to R$. Легко видеть, что на кольце $C(X)$ определяется линейное действие группы G согласно формуле

$$(gf)(x) = f(g^{-1}x)$$

для всех $g\in G$, $x\in X$ и $f\in C(X)$. Ясно также, что любое эквивариантное отображение $\alpha: X\to Y$ G-пространства X в G-пространство Y порождает G-гомоморфизм (т. е. гомоморфизм, являющийся G-отображением) $\alpha^*: C(Y)\to C(X)$ кольца $C(Y)$ в кольцо $C(X)$ согласно формуле $\alpha^*(f)=f\circ\alpha$ для всех $f\in C(Y)$. Имеет место

Теорема 6. *Пусть G—любая группа, а $\alpha: X\to Y$ эквивариантное отображение бикомпактных G-пространств. Тогда порожденный им G-гомоморфизм $\alpha^*: C(Y)\to C(X)$ является G-изоморфизмом тогда и только тогда, когда α является эквиморфизмом.*

Таким образом, теоремой 6 вопрос об эквивалентности двух непрерывных действий сводится к вопросу об эквивалентности двух линейных действий.

Автор глубоко благодарит проф. Ю. Н. Смирнова, под чьим непосредственным руководством выполнена настоящая работа.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Ս. Հ. ԱՆՏՈՆՅԱՆ

Բիկոմպակտ G-ընդլայնումների դասակարգումը էկվիվարիանտ արտապատկերումների օղակների միջոցով

Հոդվածում կառուցվում է կանոնիկ փոխմիարժեք համապատասխանություն տրված X տիխոնովյան G-տարածության (G-ն բիկոմպակտ խումբ է) բոլոր բիկոմպակտ G-ընդլայնումների բազմության և $E(X, C(G))$-օղակի բոլոր այն փակ ինվարիանտ ենթաօղակների բազմության միջև, որոնք անջատում են X տարածության կետերը և փակ բազմությունները։ Այստեղ $E(X, C(G))$-ն բոլոր այն $f: X\to C(G)$ էկվիվարիանտ արտապատկերումների G-օղակն է, որոնց համար $\overline{f(X)}$-պատկերի փակույթը բիկոմպակտ է։ Որպես մասնավոր հետևանք, առավել պարզ և բնական ճանապարհով, ստացվում է դը Վրիսի լեմման տիխոնովյան G-տարածության սահմանափակության վերաբերյալ։ Բացի դրանից, այստեղ ցույց է տրվում նաև, որ G-բիկոմպակտ խմբի երկու անընդհատ գործողությունների համարժեքության հարցը համազոր է նրա երկու գծային գործողությունների համարժեքության հարցին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. de Vries*, Topological transformation groups I, Mathematisch centrum, Amsterdam, 1975. [2] *J. de Vries*, Bull. Acad. Pol. Sci., ser. math., astr., phys., v. 26, №3 (1978). [3] *И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов*, Коммутативные нормированные кольца, М., Изд. физ.-мат. лит., 1960. [4] *R. Palais*, Mem. Amer. Math. Soc., № 36 (1960).