ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 4

УДК 550.34+699.841

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

Р. О. Амасян, Г. Г. Амбарцумян

К вероятностному подходу моделирования сейсмических процессов

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 27/IV 1979)

При моделировании динамических, в частности, сейсмических, процессов на естественном гравитационном поле, т. е. при равных ускорениях оригинала и модели $W'=W$, множители подобия линейных размеров α, напряжения β, деформации γ, объемных весов δ, времени ξ, модулей упругости материалов модели E' и оригинала E должны удовлетворять следующим условиям [1]:

$$\xi=\sqrt{\alpha\gamma};\ \beta=\alpha\delta;\ E'/E=\frac{\alpha\delta}{\gamma}. \tag{1}$$

Статистический подход к решению задачи заключается в том, чтобы найти законы распределения вероятностей и основные числовые характеристики (среднее значение и среднеквадратическое отклонение) множителей подобия α, β, γ по заданным вероятностным характеристикам материалов модели E' и оригинала E.

Множители подобия для объемных весов δ и времени ξ принимаются постоянными как коэффициенты, мало поддающиеся флуктуациям при процессе возведения и испытания модели.

Условия (1) преобразуем и пишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha&=\varphi_1(\lambda)=\xi\delta^{-1/2}\lambda^{1/2};\\ \beta&=\varphi_2(\lambda)=\xi\delta^{1/2}\lambda^{1/2};\\ \gamma&=\varphi_3(\lambda)=\xi\delta^{1/2}\lambda^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\lambda=E'/E$ принимается случайной величиной, характеризующей деформативные свойства материалов модели и оригинала, вероятностные характеристики которой следует определять по вероятностным характеристикам случайных величин E и E'.

Подобная задача была решена для частного случая в предположении, что отношение $\lambda=E'/E$ в первом приближении имеет нормальный закон распределения для нормальных распределений модулей упругости материала оригинала E и модели E' [2].

Ниже рассматривается случай для произвольных функций распределений модулей упругости материалов модели оригинала.

В терминах теории вероятностей задача выбора оптимальных множителей подобия α, β, γ может быть сформулирована как задача определения их средних значений по заданной плотности распределения вероятностей частного $\lambda - f_\lambda(x)$.

Вид этого распределения, с учетом независимости случайных величин E и E', определяется по формуле [3]:

$$f_\lambda(x) = \int_0^{\infty} z f_1(zx) f_2(z) dz - \int_0^{-\infty} z f_1(zx) f_2(z) dz, \tag{3}$$

где $f_1(z)$—плотность распределения модуля упругости материала модели E'; $f_2(z)$—плотность распределения модуля упругости материала оригинала E.

Обозначим плотности распределений вероятностей случайных величин α, β, γ через $g(\alpha)$, $g(\beta)$, $g(\gamma)$. Ввиду того, что функции $\alpha = \varphi_1(\lambda)$, $\beta = \varphi_2(\lambda)$, $\gamma = \varphi_3(\lambda)$ монотонные в пределах изменения интересующих нас значений аргумента λ, для определения искомых распределений вероятностей можно пользоваться формулами [4]:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= f_\lambda[\psi(\alpha)]|\psi'(\alpha)|; \\ g(\beta) &= f_\lambda[\psi(\beta)]|\psi'(\beta)|; \\ g(\gamma) &= f_\lambda[\psi(\gamma)]|\psi'(\gamma)|. \end{aligned} \tag{4}$$

где $\psi(\alpha)$, $\psi(\beta)$, $\psi(\gamma)$—функции, обратные функциям (2), соответственно равные:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \alpha^2\delta\xi^{-2}; \\ \psi(\beta) &= \beta^2\xi^{-2}\delta^{-1}; \\ \psi(\gamma) &= \xi^2\delta\gamma^{-2}, \end{aligned} \tag{5}$$

а $\psi'(\alpha)$, $\psi'(\beta)$, $\psi'(\gamma)$—производные первой степени от соответствующих аргументов:

$$\begin{aligned} \psi'(\alpha) &= 2\alpha\delta\xi^{-2}; \\ \psi'(\beta) &= 2\beta\xi^{-2}\delta^{-1}; \\ \psi'(\gamma) &= -2\xi^2\delta\gamma^{-3}. \end{aligned} \tag{6}$$

Плотности распределений вероятностей коэффициентов подобия для линейных размеров α, напряжений β и деформаций γ согласно уравнениям (4), (5), (6) соответственно равны:

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 2 f_\lambda(\alpha^2\delta\xi^{-2})\alpha\delta\xi^{-2}; \\ g(\beta) &= 2 f_\lambda(\beta^2\xi^{-2}\delta^{-1})\beta^2\xi^{-2}\delta^{-1}; \\ g(\gamma) &= 2 f_\lambda(\xi^2\delta\gamma^{-2})\xi^2\delta\gamma^{-3}. \end{aligned} \tag{7}$$

Для вычисления оптимальных значений множителей подобия $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ получаем следующие формулы:

$$\bar{\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha g(\alpha)d\alpha=2\delta\xi^2\int_{-\infty}^{\infty}\alpha^2 f_\lambda(\alpha^2\delta\xi^{-2})d\alpha;$$

$$\bar{\beta}=\int_{-\infty}^{\infty}\beta g(\beta)d\beta=2\xi^{-2}\delta^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\beta^2 f_\lambda(\beta^2\xi^{-2}\delta^{-1})d\beta; \tag{8}$$

$$\bar{\gamma}=\int_{-\infty}^{\infty}\gamma g(\gamma)d\gamma=2\xi^2\delta\int_{-\infty}^{\infty}\gamma^{-2} f_\lambda(\xi^2\delta\gamma^{-2})d\gamma.$$

Для иллюстрации предложенного метода определения оптимальных множителей подобия по вероятностным характеристикам материалов модели E' и оригинала E рассмотрен случай независимых случайных величин E' и E с одинаковым распределением Релея:

$$f_{E'}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma_1^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} & \text{при } x\geqslant 0\\ 0 & \text{при } x<0;\end{cases}$$

$$f_E(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma_2^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}} & \text{при } x\geqslant 0\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Формула (3) для определения плотности распределения λ принимает следующий вид:

$$f_\lambda(x)=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\int_0^\infty xz^3e^{-\frac{z^2(x^2\sigma_2^2+\sigma_1^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}}dz.$$

Проделав вычисления, получаем:

$$f_\lambda(x)=\frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2x}{(x^2\sigma_2^2+\sigma_1^2)^2}.$$

Плотности распределений вероятностей коэффицентов подобия α, β, γ согласно (7) соответственно равны:

$$g(\alpha)=\frac{4\alpha^2\delta^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\xi^4\left(\dfrac{\alpha^4\delta^2}{\xi^4}\sigma_2^2+\sigma_1^2\right)^2};$$

$$g(\beta)=\frac{4\beta^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\xi^4\delta^2\left(\dfrac{\beta^4}{\xi^4\delta^2}\sigma_2^2+\sigma_1^2\right)^2};$$

Название распределения	Вид плотностей распределений
1	2
Нормальное распределение	$f_E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$ $f_E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}$
Распределение Релея	$f_E(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_1^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $f_E(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_2^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
Распределение Эрланга	$f_E(x) = \begin{cases} \frac{4x}{m_1^2} e^{-\frac{2x}{m_1}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $f_E(x) = \begin{cases} \frac{4x}{m_2^2} e^{-\frac{2x}{m_1}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Вид плотности распределения частного $\lambda = E'/E$	Вид оптимальных множителей подобия
3	4
$f_\lambda(x) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\pi(x^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2)}$	$\bar{\alpha} = \sqrt{2}\,\xi\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2\delta}}$ $\bar{\beta} = \sqrt{2}\,\xi\sqrt{\frac{\delta\sigma_1}{\sigma_2}}$ $\bar{\gamma} = \sqrt{2}\,\xi\sqrt{\frac{\delta\sigma_2}{\sigma_1}}$
$f_\lambda(x) = \frac{2\sigma_1^2\sigma_2^2 x}{(x^2\sigma_2^2 + \sigma_1^2)^2}$	$\bar{\alpha} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\xi\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2\delta}}$ $\bar{\beta} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\xi\sqrt{\frac{\delta\sigma_1}{\sigma_2}}$ $\bar{\gamma} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\xi\sqrt{\frac{\delta\sigma_2}{\sigma_1}}$
$f_\lambda(x) = \frac{6m_1^2 m_2^2 x}{(m_2 x + m_1)^4}$	$\bar{\alpha} = \frac{3\pi}{8}\xi\sqrt{\frac{\delta m_1}{m_2\delta}}$ $\bar{\beta} = \frac{3\pi}{8}\xi\sqrt{\frac{\delta m_1}{m_2}}$ $\bar{\gamma} = \frac{3\pi}{8}\xi\sqrt{\frac{m_2\delta}{m_1}}$

1	2	3	4
Гамма-распределение	$f_E(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(k_1)\beta_1^{k_1}}\,x^{k_1-1}e^{-\frac{x}{\beta_1}} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ $f_F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(k_2)\beta_2^{k_2}}\,x^{k_2-1}e^{-\frac{x}{\beta_2}} & x>0\\ 0 & x>0\end{cases}$	$f_\lambda(x)=\dfrac{x^{k_1-1}\beta_1^{k_2}\beta_2^{k_1}}{B(k_1,k_2)(x\beta_2+\beta_1)^{k_1+k_2}}$	$\bar\alpha=\dfrac{\pi}{2}\xi\sqrt{\dfrac{\beta_1}{\beta_2\delta}}$ $\bar\beta=\dfrac{\pi}{2}\xi\sqrt{\dfrac{\beta_1\delta}{\beta_2}}$ $\bar\gamma=\dfrac{\pi}{2}\xi\sqrt{\dfrac{\beta_2\delta}{\beta_1}}$
Распределение Эрланга Гамма-распределение	$f_E(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{m^2}e^{-\frac{2x}{m}} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ $f_F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(x)\mu^k}\,x^{k-1}e^{-\frac{x}{\mu}} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$	$f_\lambda(x)=\dfrac{4m^k\mu^2k(k+1)x}{(2x\mu+m)^{k+2}}$	$\bar\alpha=\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\,\dfrac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k)}\xi\sqrt{\dfrac{m}{2\delta\mu}}$ $\bar\beta=\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\,\dfrac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k)}\xi\sqrt{\dfrac{m\delta}{2\mu}}$ $\bar\gamma=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\dfrac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k)}\xi\sqrt{\dfrac{2\delta\mu}{m}}$

$$g(\gamma)=\frac{4\xi^4\delta^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\gamma^5\left(\frac{\xi^4\delta^2}{\gamma^4}\sigma_2^2+\sigma_1^2\right)^2}.$$

Определим оптимальные множители подобия $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ случайных величин линейных размеров α, напряжений β, деформаций γ по формулам (8):

$$\bar{\alpha}=\frac{4\delta^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\xi^4}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha^4 d\alpha}{\left(\frac{\alpha^4\delta^2}{\xi^4}\sigma_2^2+\sigma_1^2\right)^2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\xi\sqrt{\frac{\sigma_1}{\delta\sigma_2}};$$

$$\bar{\beta}=\frac{4\sigma_1^2\sigma_2^2}{\xi^4\delta^2}\int\limits_0^\infty\frac{\beta^4 d\beta}{\left(\frac{\beta^4}{\xi^4\delta^2}\sigma_2^2+\sigma_1^2\right)^2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\xi\sqrt{\frac{\delta\sigma_1}{\sigma_2}};$$

$$\bar{\gamma}=4\xi^4\delta^2\sigma_1^2\sigma_2^2\int\limits_0^\infty\frac{d\gamma}{\gamma^4\left(\frac{\xi^4\delta^2}{\gamma^4}\sigma_2^2+\sigma_1^2\right)^2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\xi\sqrt{\frac{\delta\sigma_2}{\sigma_1}}.$$

Были рассмотрены примеры на нахождение оптимальных множителей подобия $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ для разных видов распределений случайных величин модулей упругости материалов модели E' и оригинала E.

Полученные результаты приведены в таблице.

Численный пример. Рассмотрим задачу определения оптимальных множителей подобия линейных размеров, напряжений и деформаций при $\xi=0{,}724$, $\delta=0{,}7$ по вероятностным характеристикам модулей упругости материалов модели и оригинала.

В результате испытаний по 30-ти образцам из материалов модели и оригинала были получены две статистические выборки, по которым определяли средние значения модулей упругости материалов модели $\bar{E}'=36{,}1\cdot10^3$ *кг/см²* и оригинала $\bar{E}=26{,}4\cdot10^4$ *кг/см²*.

Для определения вероятностных характеристик модулей упругости материалов модели и оригинала сформулирована гипотеза H_1, состоящая в том, что модуль упругости материала модели имеет распределение Эрланга с математическим ожиданием m:

$$f_{E'}(x)=\frac{4x}{m^2}e^{-\frac{2x}{m}},$$

и гипотеза H_2 для материала оригинала, состоящая в том, что модуль упругости имеет гамма-распределение с параметром $k=2$ и математическим ожиданием 2ν:

$$f_E(x)=\frac{1}{\nu^2}xe^{-\frac{x}{\nu}}$$

Проверка экспериментальных данных с гипотезами H_1 и H_2 с помощью критерия согласия Пирсона χ^2 дала положительные результаты. После определения вероятностных характеристик можно перейти непосредственно к определению оптимальных множителей подобия.

Для решения данной задачи были использованы результаты таблицы для распределения Эрланга модуля упругости материала модели и гамма-распределения с параметром $k=2$ модуля упругости материала оригинала, т. е. оптимальные множители подобия вычислялись по формулам:

$$\bar{\alpha} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} \xi \sqrt{\frac{m}{2\delta\nu}};$$

$$\bar{\beta} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} \xi \sqrt{\frac{m\delta}{2\nu}};$$

$$\bar{\gamma} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} \xi \sqrt{\frac{2\delta\nu}{m}}.$$

Проделав вычисления по следующим данным: $\xi=0{,}724$, $\delta=0{,}7$, $2\nu=26{,}4\cdot 10^4$, $m=36{,}1\cdot 10^3$, получаем:

$$\bar{\alpha}=0{,}355;$$

$$\bar{\beta}=0{,}248;$$

$$\bar{\gamma}=1{,}848.$$

Ордена Трудового Красного Знамени
Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Հ. ՀԱՄԱՍՅԱՆ, Գ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Սեյսմիկ պրոցեսների մոդելացման հավանական մոտեցման մասին

Հոդվածում դիտարկվում է օպտիմալ նմանության գործակիցների որոշման ստատիստիկական մեթոդը, ըստ մոդելի և օրիգինալի նյութերի հավանականական բնութագրերի։

Բերվում է գծային չափսերի, լարումների և դեֆորմացիաների օպտիմալ նմանության գործակիցների մաթեմատիկական բանձևերը մոդելի և օրիգինալի առանձգականության մոդուլների տարբեր տեսքի բաշխման ֆունկցիաների համար։

Դիտարկվում է նմանության օպտիմալ գործակիցների որոշման թվային օրինակ, երբ մոդելի առաձգականության մոդուլը ունի էռլանգի բաշխման ֆունկցիա, իսկ օրիգինալինը՝ գամմա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Назаров*, О механическом подобии твердых деформируемых тел. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1965. [2] *Р. О. Амасян*, Бюллетень по инженерной сейсмологии, № 10, 1979. [3] *Б. В. Гнеденко*, Курс теории вероятностей, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1961. [4] *Е. С. Вентцель*, Теория вероятностей, Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1962