ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 4

УДК 517.11

МАТЕМАТИКА

А. С. Машурян

Об одном классе примитивно рекурсивных функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/VII 1979)

Настоящая статья является естественным продолжением ([1]) и содержит три окончательных результата:

1°. Указан класс всех индукционных моделей (см. ниже определение 1), на которых определена показательная функция a^x (см. ниже теорему 5).

2°. Указан класс всех индукционных моделей, на которых определена показательно-степенная функция x^y (см. ниже теорему 4).

3°. Установлен класс всех индуктивно определимых функций (см. ниже определение 2), а именно установлено, что таковыми являются только и только многочлены с натуральными коэффициентами (см. ниже теоремы 3, 6, 6′).

В конце статьи указывается отношение полученных здесь результатов к „парадоксу Дедекинда" ([1]).

Определение 1. Пусть A—произвольное непустое множество, a_0—некоторый фиксированный элемент из A, φ—отображение множества A в A. Тройка $M=\langle A, a_0, \varphi\rangle$ называется индукционной моделью, если выполнено следующее условие, называемое свойством индукции: если A'—такое подмножество множества A, что 1) $a_0\in A'$ и 2) из $a\in A'$ следует, что $\varphi(a)\in A'$, то $A'=A$.

Индукционная модель $M=\langle A, a_0, \varphi\rangle$ называется моделью Пеано, если выполнены требования:

1°. равенство $\varphi(a)=a_0$ не выполнено ни для какого элемента $a\in A$;

2°. если $a, b\in A$ и $a\neq b$, то $\varphi(a)\neq\varphi(b)$.

Замечание 1. То, что в нашем определении названо моделью, правильнее было, следуя, например, ([2]), называть алгеброй. Но мы придерживаемся восходящей к ([2]) более удобной для наших целей и не приводящей к путанице терминологии из ([1]). Кроме того, так как в дальнейшем мы будем рассматривать только индукционные модели, то для краткости вместо „индукционная модель" мы будем писать просто "модель".

Определение 2.

(а) Примитивно рекурсивная функция $f(x)$ называется определимой на модели M, если из $f(x_1) \neq f(x_2)$ следует, что $x_1 \neq x_2$.

(б) Примитивно рекурсивная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется определимой на модели M, если из $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ следует, что $x_1 \neq y_1$ или $x_2 \neq y_2$ или $\cdots x_n \neq y_n$.

(в) Примитивно рекурсивная функция называется индуктивно определимой функцией (ИОФ), если она определима на любой модели.

В [1] введено понятие типа модели и с помощью этого понятия установлены некоторые свойства моделей и ИОФ. Нужные для нашего изложения факты из указанной статьи даны в следующей теореме:

Теорема 1. (*а*) *функции* const, $x+y$, xy *являются ИОФ*

(*б*) *для того, чтобы функция* $f(x)$ *была ИОФ, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары натуральных чисел* m *и* n *выполнялось условие:* $f(m+n) = f(m) + kn$ *при некотором натуральном* k. (*Число нуль здесь считается натуральным*);

(*в*) *для того, чтобы функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *являлась ИОФ, необходимо и достаточно, чтобы она являлась такой по каждой переменной, при фиксированных значениях других переменных.*

Из (б) сразу следует

Теорема 2. (*а*) *Суперпозиция двух ИОФ является ИОФ;*

(б) *если* $f(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$—*суть ИОФ, то функция* $g(x) = f(\varphi(x), \psi(x))$ *также является ИОФ.*

Доказательство. (а) Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ произвольные ИОФ. Тогда при произвольных натуральных m и n имеем:

$$f(\varphi(m+n)) = f(\varphi(m) + k_1 n) = f(\varphi(m)) + k_2 k_1 n = f(\varphi(m)) + kn,$$

то, что требовалось доказать.

(б) Имеем $g(m+n) = f(\varphi(m+n), \psi(m+n)) = f(\varphi(m) + k_1 n, \psi(m) + k_2 n) = f(\varphi(m), \psi(m)) + l_1 k_1 n + l_2 k_2 n = g(m) + kn$.

Комбинируя теоремы 1 (а), (б) и 2 (а), (б), получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Многочлен* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ *с произвольными натуральными коэффициентами является ИОФ.*

Ниже, в теореме 6, будет доказано обратное утверждение. В [1] установлен критерий определимости показательно-степенной, а следовательно, и показательной функций на модели типа (m, n) (теорема 6 из [1]), но найдены не все модели, удовлетворяющие этому критерию. Пользуясь теоретико-числовыми методами, а именно, теорией сравнимости по модулю, в частности, малой теоремой Ферма (см., например, [4], гл. II), нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. *Для того, чтобы функция* x^y *была определима на модели типа* (m, n), *необходимо и достаточно, чтобы* $n = 2^k$ *при некотором натуральном* k *и* $m \neq 0$, *причем: либо* $k=0$, *либо* $k \neq 0$ *и* $m \geqslant k$.

Теорема 5. *Показательная функция* a^x, *кроме моделей, указанных в теореме 4, определима еще на моделях типа* (m, n), *где при разложении* $a = p_1^{\alpha_1} \cdot \cdot \cdot p_l^{\alpha_l}$ *имеют место условия:* $m = 0$ *и* $n = p_{i_1}^{j_1} \cdot \cdot \cdot p_{i_k}^{j_k}$, *где* $0 \leq i_1 < l$; $p_0 = 1$; $1 \leq j_u \leq m + \alpha_u$, $u = 1, \cdot \cdot \cdot , k$.

Для доказательства теоремы 6 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Если функции* $f(x) + g(x)$ *и* $g(x)$ *являются ИОФ, то функция* $f(x)$ *также является ИОФ.*

Доказательство. При произвольных натуральных m и n имеем: $f(m+n) + g(m+n) = f(m) + g(m) + ln$ и $g(m+n) = g(m) + kn$, где l, k некоторые натуральные числа и $l \geq k$. Следовательно, $f(m+n) = f(m) + (l-k)n$ и лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если функции* $f(x) \cdot g(x)$ *и* $g(x)$ *являются ИОФ, то функция* $f(x)$ также является *ИОФ.*

Доказательство. Пусть $M = \langle A, a_0, \varphi \rangle$ — произвольная модель и $a \in A$ — произвольный элемент. Тогда $g(a)$ и $f(a)$ $g(a)$ однозначно определены. Пусть $f(a) = c_1$ и $f(a) = c_2$; тогда $f(a)g(a) = c_1 g(a)$ и $f(a)g(a) = c_2 g(a)$. Следовательно, $c_1 g(a) = c_2 g(a)$ и из теоремы 1 (а) получаем, что $c_1 = c_2$, что и доказывает лемму 2.

Теорема 6. *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *была ИОФ, необходимо и достаточно, чтобы она была многочленом с натуральными коэффициентами.*

Доказательство. Достаточность установлена в теореме 3. Докажем необходимость. Пусть $f(x)$ — произвольная ИОФ, а $t > 0$ — некоторое натуральное число. Так как $f(x)$ определена на модели типа $(0, t)$, то имеем: $f(t) = f(0+t) = f(0) + k_t t$ (*).

Рассмотрим функцию $\varphi_1(t) = k_t$. По теореме 1 (а) и леммам 1, 2 $\varphi_1(t)$ является ИОФ. Тогда имеем: $\varphi_1(t) = \varphi_1(0+t) = \varphi_1(0) + l_t \cdot t$. Положим $\varphi_2(t) = l_t$. Аналогично предыдущему, $\varphi_2(t)$ является ИОФ. Подстановкой в (*) получаем:

$$f(t) = f(0) + \varphi_1(0)t + \varphi_2(t)t^2.$$

Продолжая таким образом, на k-ом шаге получим:

$$f(t) = f(0) + \varphi_1(0)t + \varphi_2(0)t^2 + \cdot \cdot \cdot + \varphi_{k-1}(0)t^{k-1} + \varphi_k(t)t^k.$$

Но так как при фиксированном t $f(t)$ является натуральным числом, то в последовательности

$$\varphi_1(0), \varphi_2(0), \cdot \cdot \cdot , \varphi_n(0), \cdot \cdot \cdot \quad (**)$$

имеем конечное число отличных от нуля чисел. Пусть n — номер последнего отличного от нуля числа в последовательности (**). Тогда имеем:

$$f(t) = f(0) + \varphi_1(0)t + \varphi_2(0)t^2 + \cdot \cdot \cdot + \varphi_n(0)t^n,$$

и так как эти коэффициенты от t не зависят, то теорема 6 доказана.

Аналогично можно доказать следующую теорему:

Теорема 6'. *Для того, чтобы примитивно рекурсивная функция $f(x_1, x_2, \cdot \cdot \cdot, x_n)$ была ИОФ, необходимо и достаточно, чтобы она являлась многочленом с натуральными коэффициентами.*

Таким образом, возвращаясь к "парадоксу Дедекинда" о том, что "свойства индукции не достаточно для определений по индукции" (см., например, ([1])), теперь можно утверждать следующее:

свойство индукции достаточно лишь для определения многочленов; для задания иных функций по индукции необходимо вводить дополнительные аксиомы, постулирующие свойства модели, на которой функция должна определяться.

Например, для задания класса примитивно рекурсивных функций необходимы аксиомы Пеано либо какая-нибудь эквивалентная им аксиоматика натурального ряда.

Ереванский государственный университет

Ա. Ս. ՄԱՇՈՒՐՅԱՆ

Նախնական ռեկուրսիվ ֆունկցիաների մի դասի մասին

Այս հոդվածում շարունակվում է ռեկուրսիվ սխեմաներով առույթներ սահմանելու (1)-ում սկսած հետազոտությունը և տրվում են սպառիչ պատասխաններ հետևյալ երեք հարցերին.

1. Նշել բոլոր այն հանգունակների դասը, որոնց վրա որոշելի է ցուցչային առույթը (թեորեմ 5),

2. Նշել բոլոր այն հանգունակների դասը, որոնց վրա որոշելի է աստիճանա-ցուցչային առույթը (թեորեմ 4),

3. Նշել բոլոր այն առույթների դասը, որոնք որոշելի են բոլոր հանգունակների վրա (թեորեմներ 6, 6'),

Հոդվածի վերջում ակնարկվում է «Դեդեկինդյան պարադոքսը»։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. С. Машурян*, ДАН Арм ССР, т LIX, № 4 (1974). [2] *Л. Генкин*, О математической индукции, Физматгиз, М., 1962 [3] *А И. Мальцев*, Алгебраические системы, «Наука», М, 1970 [4] *Л. Дирихле*, Лекции по теории чисел, М., 1936 [5] *Р. Дедекинд*, Что такое числа и для чего они служат? Казань, 1903.