ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 4

УДК 513.88+517.948.35+517.948.5

МАТЕМАТИКА

Ш. Н. Саакян

К теории представления сжатий и их характеристических функций

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 21/VI 1979)

1. В работах [1-3] М. Г. Крейн построил общую теорию представления для эрмитовых операторов с конечными дефектными числами. Затем многие положения этой теории были распространены на случай эрмитова оператора с бесконечными дефектными числами [4]. Отметим некоторые первоначальные понятия этой теории для изометрического оператора.

Пусть V—некоторый изометрический оператор в гильбертовом пространстве H, с областью определения $D(V)$ и областью значения $\Delta(V)$. Рассмотрим оператор V_*, определенный следующим образом: $V_* := V^{-1}$ на $\Delta(V)$, который также является изометрическим оператором. Как известно, множество $\Delta_\zeta(V_*)=(I-\zeta V_*)\,D(V_*)$ для произвольной точки $\zeta\in C$ $(|\zeta|\neq 1)$ замкнутое подпространство (что эквивалентно тому, что ζ является точкой регулярного типа для оператора V_*) и поле регулярности оператора V_*, вообще говоря, распадается на две компоненты, а именно внутренность и внешность единичного круга. Дефектное подпространство $D_\zeta(V_*) := H\ominus\Delta_\zeta(V_*)$ оператора V_*, соответствующее точке ζ, для всех ζ из одной и той же компоненты, поле регулярности имеет одну и ту же размерность.

Пусть L—некоторое подпространство из H, называемое масштабным, такое, что имеет место следующее разложение:

$$H=\Delta_\zeta(V_*)\dotplus L. \tag{1}$$

Обозначим через P_ζ оператор косого проектирования пространства H на подпространство L параллельно Δ_ζ. Множество всех $\zeta\in C$, для которых имеет место разложение (1), $\rho(V_*, L)$ открытое множество и $\mathrm{P}_{(\zeta)}$ является голоморфной оператор-функцией на $\rho(V_*, L)$.

Нетрудно видеть, что отображение

$$f\to f_L(\zeta) := \mathrm{P}(\zeta)f$$

относит каждому вектору $f\in H$ голоморфную на $\rho(V_*, L)$ векторфункцию от ζ, $f_l(\zeta)$ со значениями в L, которое является однозначным (при условии, что V_*—простой изометрический оператор) отображением, и что при этом оператор V_* переходит в оператор умножения на независимую переменную.

2. Как известно, впервые понятие характеристической функции для изометрического оператора с дефектными числами (1, 1) ввел М. С. Лившиц в работе [6], а затем для изометрического оператора с дефектными числами (m, m) $(m<\infty)$ в [7]. В 1951 г. М. Г. Крейн рассмотрел характеристическую функцию $\chi(\zeta)$ для изометрического оператора с произвольными равными дефектными числами. В дальнейшем теория характеристических функций оператора развивается для разных случаев многими авторами. Нас будет интересовать характеристическая функция сжатия в виде Секефальви-Надь-Фояша [8]. Напомним ее определение.

Пусть T—сжатие в гильбертовом пространстве H. Дефектные операторы D_T и D_{T^*}, дефектные подпространства $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}_{T^*}$, связанные со сжатием T, определяются соответственно формулами:

$$D_T=(I-T^*T)^{1/2} \qquad D_{T^*}=(I-TT^*)^{1/2}$$

$$\mathfrak{D}_T=\overline{D_T H} \qquad \mathfrak{D}_{T^*}=\overline{D_{T^*} H}$$

Множество всех $\lambda\in C$, для которых оператор $(I-\lambda T^*)$ ограниченно обратим (оно открытое множество и содержит единичный круг), обозначим через $\Lambda(T)$. Для $\lambda\in\Lambda(T)$ положим

$$\Theta_T(\lambda)=[-T+\lambda D_{T^*}(I-\lambda T^*)^{-1}D_T]|_{\mathfrak{D}_T}.$$

$\Theta_T(\lambda)$ оказывается аналитической оператор-функцией, значения которой являются сжатиями из $\mathfrak{D}_T$ в $\mathfrak{D}_{T^*}$, причем $|\Theta_T(0)f|<|f|$ для $f\in\mathfrak{D}_T$.

Чистую сжимающую аналитическую функцию

$$\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}; \Theta_T(\lambda)\} \quad (|\lambda|<1)$$

и называют характеристической функцией сжатия T. В том частном случае, когда T—частичная изометрия, т. е. на $\mathfrak{D}_T$ оператор T обращается в нуль, легко видеть, что имеем $D_T=P_{\mathfrak{D}_T}$; $D_{T^*}=P_{\mathfrak{D}_{T^*}}$, и, следовательно, функция $\Theta_T(\lambda)$ будет иметь следующий вид:

$$\chi_T(\lambda)=\lambda P_{\mathfrak{D}_{T^*}}(I-\lambda T^*)^{-1}P_{\mathfrak{D}_T}|_{\mathfrak{D}_T} \quad (|\lambda|<1).$$

3. Пусть L—некоторая копия дефектного подпространства $\mathfrak{D}_T$ сжатия T. Рассмотрим пространство $\bar{H}=H\oplus L$ и оператор V в $\bar{H}$, определенный следующим образом:

$$V\{f,0\}=\{Tf, D_Tf\} \text{ для } f\in H.$$

Легко видеть, что V — изометрический оператор с $D(V)=H$ и что частично изометрическое расширение $\bar{V}:=V(I-P_L)$ оператора V обладает следующими свойствами:

$$T=P_H V|_H=P_H \bar{V}|_H \quad \text{и} \quad T^*=P_H \bar{V}^*|_H=\bar{V}^*|_H.$$

Пусть V_* оператор, определенный как в пункте 1 для V, тогда будем иметь, что $\bar{V}^*=V_* P_{\mathfrak{Z}(V)}$.

Оказывается, что между оператор-функцией $\mathbf{P}(\zeta)$ и характеристической функцией $\Theta_T(\zeta)$ сжатия T существует тесная связь, а именно, верна следующая

Теорема. *Характеристическая функция $\Theta_T(\zeta)$ совпадает с функцией $\mathbf{P}(\zeta)|_L$ (т. е. сужением оператор-функции $\mathbf{P}(\zeta)$ на подпространстве L).*

При доказательстве указанной теоремы используется следующая $\chi(\zeta)=\zeta\mathbf{P}(\zeta)|_L$ связь между характеристической функцией частичной изометрии $\bar{V}$ и оператор-функцией $\mathbf{P}(\zeta)$.

4. Пусть частично изометрический оператор $\bar{V}$ из класса $C_{\cdot 0}$ (т. е. для произвольного $f\in\bar{H}$ $(\bar{V}^*)^n f\to 0$ при $n\to\infty$). Тогда можно доказать, что отображение $f\to f_{L_*}(\zeta):=\mathbf{P}(\zeta)f$ $(f\in\bar{H})$ изометрически отображает пространство H в некоторое подпространство $\mathbf{H}$ пространства Харди $H_2(L_*)$, а оператор T^* переходит в оператор

$$(\mathbf{T}^* f)(\zeta)=\frac{1}{\zeta}[f(\zeta)-f(0)]\quad f\in\mathbf{H}.$$

Автор выражает благодарность М. Г. Крейну за обсуждение данной работы.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Շ. Ն. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Սեղմումների ներկայացման թեորիայի և նրանց խարակտերիստիկ ֆունկցիաների մասին

Դիցուք V իզոմետրիկ օպերատոր է H հիլբերտյան տարածության մեջ. Մ. Գ. Կրեյնի հայտնի էրմիտյան օպերատորների ներկայացման նման ստացվում է V-ի ներկայացում։ Այդ տեսության մեջ էական դեր է խաղում $P(\zeta)$ օպերատոր ֆունկցիան, որի արժեքները թեք պրոեկտորներ են ինչ որ L ենթատարածության վրա։

Թող T-ն լինի սեղմում։ Դիտարկվում է T-ի մասնակի իզոմետրիկ լայնացում և նրա համար արդեն նշված ներկայացումից ստացվում է ներկայացում T-ի սեղմման համար։

Ի հայտ է բերվում T սեղմման խարակտերիստիկ ֆունկցիայի և $P(\zeta)$—օպերատոր ֆունկցիայի միջև հետևյալ կապը.

Թեորեմ. T օպերատորի $\Theta_T(\zeta)$ խարակտերիստիկ ֆունկցիան համընկնում է $P(\zeta)$—օպերատոր ֆունկցիայի նեղացման հետ L ենթատարածության վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 43, № 8 (1944). [2] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 44, № 4 (1944). [3] *М. Г. Крейн*, УМЖ, 1 : 2, 3—66 (1949). [4] *М. Г. Крейн*, Труды международного конгресса математиков (Москва, 1966), «Мир», М., 1968. [5] *М. Г. Крейн, Ш. Н. Саакян*, ДАН СССР, т. 169, № 6 (1966). [6] *М. С. Лившиц*, Мат. сб., 19(1946). [7] *М. С. Лившиц*, Мат. сб., 26(1950). [8] *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, «Мир», М., 1970.