УДК 157.98

МАТЕМАТИКА

В. В. Восканян

О наибольшей и наименьшей $\otimes$ -нормах тензорных
 произведений банаховых пространств

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 19/VI 1979)

Как известно, до сих пор остается открытой следующая пробле-
 ма, поставленная А. Гротендиком (см. ^(1,2)).

Является ли каноническое вложение $E \hat{\otimes} F \rightarrow E \check{\otimes} F$ собственным
 для произвольных бесконечномерных банаховых пространств E и F ?
 Другими словами, существует ли для всякого $A > 0$ конечная сумма
 $u = \sum x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ такая, что $\|u\|_{\wedge} > A \|u\|_{\vee}$?

Если это имеет место для некоторых пространств E и F , то ус-
 ловимся обозначать этот факт коротко:

$$E \hat{\otimes} F \neq E \check{\otimes} F. \quad (*)$$

В работах А. Гротендика ^(1,2) содержатся и некоторые резуль-
 таты в этом направлении, задающие условия на одно из этих прост-
 ранств (например на F), при которых верно (*).

Произведения $E \hat{\otimes} F$ и $E \check{\otimes} F$ можно рассматривать и как классы
 операторов из E' в F (либо из F' в E , по поводу всех определений
 см., например, в ⁽¹⁾), поэтому в связи с этим несомненный интерес
 представляет собой оценка соответствующих норм конечномерных
 операторов.

В настоящей работе, используя некоторую общую конструкцию,
 мы будем строить, в зависимости от условий, налагаемых на прост-
 ранство F , подходящие „ k -мерные“ элементы $u = \sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i$ из $E \otimes F$
 (или, что то же, конечномерные операторы $u: x' \rightarrow \sum_{i=1}^k x'(x_i) y_i$ из E' в
 F) и для них будет оцениваться число $A_k = \|u\|_{\wedge} \|u\|_{\vee}^{-1}$.

Всюду в дальнейшем E и F у нас будут обозначать бесконеч-
 номерные банаховы пространства. Через $S(\cdot)$ будем обозначать замк-

нутый единичный шар соответствующего банахова пространства, а через $(\cdot)'$ — сопряженное пространство.

Напомним определения $\wedge$ - и $\vee$ -норм (обозначающих, соответственно, наибольшую и наименьшую тензорные (или $\otimes$ -) нормы).

Пусть $u = \sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i$ — произвольный элемент из $E \otimes F$ ($x_i \in E$, $y_i \in F$, $i = 1, \dots, m$).

Определение 1.

$$\|u\|_{\wedge} = \sup_{\|B\| \leq 1} \left| \sum_{i=1}^m B(x_i, y_i) \right|,$$

где верхняя грань берется по всем билинейным функционалам B на $E \times F$, у которых норма $\|B\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |B(x, y)| \leq 1$.

Определение 2.

$$\|u\|_{\vee} = \sup_{x' \in S(E'), y' \in S(F')} \left| \sum_{i=1}^m x'(x_i) y'(y_i) \right|$$

Пополнения линейного многообразия $E \otimes F$ по нормам $\wedge$ и $\vee$ обозначаются соответственно через $E \hat{\otimes} F$ и $E \underset{\vee}{\otimes} F$.

Напомним, что расстоянием Банаха—Мазура между изоморфными банаховыми пространствами X и Y называют число $\delta(X, Y) = \inf \|T\| \|T^{-1}\|$, где нижняя грань берется по всем изоморфизмам $T: X \rightarrow Y$.

Условимся также впредь через l_k^p ($1 \leq p \leq \infty$) обозначать k -мерные аналоги пространств l^p . Всюду далее $\{e_i\}_1^k$ будет обозначать канонический базис в l_k^p , причем там, где нужно, будем считать орты e_i и элементами (в естественном понимании) пространств l^p ($1 \leq p \leq \infty$).

Отправной точкой наших рассуждений будет служить теорема Дворецкого (¹):

Для любого бесконечномерного банахова пространства E и натурального числа k существует k -мерное подпространство $E_k \subset E$, почти изометричное l_k^2 .

Иными словами, для любого натурального k и $\varepsilon > 0$ найдется такое E_k , что $\delta(E_k, l_k^2) < 1 + \varepsilon$.

Заметим, что если G — некоторое подпространство F , то для произвольного элемента $u \in E \otimes G$ его $\wedge$ -норма $\|u\|_{\wedge(E \otimes G)}$ как элемента из $E \otimes G$, вообще говоря, отлична от его $\wedge$ -нормы $\|u\|_{\wedge(E \otimes F)}$ как элемента из $E \otimes F$ ($\vee$ -норма, однако, не меняется). Если G конечномерно, то, разумеется, каноническое вложение $\chi: E \hat{\otimes} G \rightarrow E \underset{\vee}{\otimes} G$ будет изоморфизмом этих пространств. Пользуясь теоремой Дворецкого, покажем, насколько можно „испортить“ χ за счет выбора G , т. е. сколь великой окажется норма $\|\chi^{-1}\|$ в зависимости от размерности G .

Теорема 1. Пусть E и F произвольны. Для любого натурального k и $\varepsilon > 0$ найдется такое k -мерное подпространство $F_k \subset F$, точки $x_1, \dots, x_k \in E$, $y_1, \dots, y_k \in F$, что для элемента $u = \sum_1^k x_i \otimes y_i$ как элемента из $E \otimes F_k$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{\wedge} \|u\|_{\vee}^{-1} > k^{1/2} - \varepsilon.$$

Доказательство. Согласно теореме Дворецкого можно выбрать k -мерные подпространства $E_k \subset E$ и $F_k \subset F$, почти изометричные l_k^2 . Чтобы не загромождать наши выкладки, будем считать, что E_k и F_k изометричны l_k^2 . Тогда все последующие оценки могут быть получены с любой точностью и в доказательствах это оговариваться не будет. Итак, будем считать, что существуют изоморфизмы $j_1: E_k \rightarrow l_k^2$ и $j_2: F_k \rightarrow l_k^2$ такие, что

$$\|j_1\| = \|j_1^{-1}\| = \|j_2\| = \|j_2^{-1}\| = 1.$$

Обозначим

$$j_1^{-1}e_i = x_i' \quad (1)$$

и

$$i = 1, \dots, k$$

$$j_2^{-1}e_i = y_i \quad (2)$$

Учитывая (1) и (2), найдем такие точки $x_i \in E$, что

$$|x_i| = 1 \text{ и } \operatorname{Re}(x_i'(x_i)) \geq |x_i'| - \delta = 1 - \delta, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3)$$

где $\delta > 0$ достаточно мало. Наконец, рассмотрим элемент $u = \sum_1^k x_i \otimes y_i$ и оценим его $\wedge$ - и $\vee$ -нормы, как элемента пространства $E \otimes F_k$.

Определим оператор $T = j_1^{-1}j_2: F_k \rightarrow E'$. По построению

$$Ty_i = x_i', \quad i = 1, \dots, k \text{ и } \|T\| = 1. \quad (4)$$

Заметив теперь, что выражение $(Ty)x$ определяет на $E \times F_k$ билинейный функционал с нормой, равной $\|T\|$, получим по определению 1 и в силу (3) и (4)

$$|u|_{\wedge} \geq \left| \sum_1^k (Ty_i)(x_i) \right| \geq k(1 - \delta). \quad (5)$$

Для оценки нормы $|u|_{\vee}$ выберем произвольно $x' \in S(E')$ и $y' \in S(F_k)$.

Если числа $c_1, \dots, c_k$ таковы, что $\sum_1^k |c_i|^2 \leq 1$, то

$$\left| \sum_1^k c_i y'(y_i) \right| = \left| y' \left(\sum_1^k c_i y_i \right) \right| = \left| y' j_2^{-1} \left(\sum_1^k c_i e_i \right) \right| \leq 1,$$

поэтому

$$\sum_1^k |y'(y_i)|^2 \leq 1.$$

В силу (3) $|x'(x_i)| \leq 1$ и, следовательно,

$$\left| \sum_1^k x'(x_i) y'(y_i) \right| \leq k^{1/2}.$$

Ввиду произвольности $x' \in S(E')$ и $y' \in S(F')$

$$\|u\|_V \leq k^{1/2}. \quad (6)$$

Сравнивая теперь соотношения (5) и (6), получаем утверждение теоремы 1.

Теорема 2. Пусть E произвольно, а F содержит подпространство G , изоморфное некоторому l^p ($2 < p \leq \infty$). Для любого натурального числа k и $\varepsilon > 0$ найдется элемент $u = \sum_1^k x_i \otimes y_i$ из $E \otimes F$ такой, что

$$\|u\|_\wedge \|u\|_V^{-1} \geq \frac{k^{1/2-1/p}}{\delta(G, l^p)} - \varepsilon. \quad (7)$$

Замечание 1. Условие теоремы эквивалентно тому, что F фактор-изоморфно $(l^p)'$, т. е. существует линейный непрерывный оператор с F' на $(l^p)'$ ($2 < p \leq \infty$).

Обозначим через $L: G \rightarrow l^p$ такой изоморфизм пространств G и l^p , что

$$\|L\| \|L^{-1}\| \leq \delta(G, l^p) + \varepsilon_1, \quad (8)$$

где $\varepsilon_1 > 0$ достаточно мало. Обозначим далее

$$\begin{aligned} L^{-1}e_i &= y_i \\ & i = 1, \dots, k, \\ L'e_i &= \bar{y}_i \end{aligned} \quad (9)$$

где $L': (l^p)' \rightarrow G'$ есть сопряженный к L оператор. Продолжим функционалы y_i с G на все пространство F с сохранением нормы и обозначим эти продолжения через $\bar{y}_i$. По построению

$$\bar{y}_i(y_i) = 1 \quad \text{и} \quad \|\bar{y}_i\| \leq \|L'\| = \|L\| \quad i = 1, \dots, k. \quad (10)$$

Пользуясь теперь теоремой Дворецкого, мы, как и в теореме 1, найдем k -мерное подпространство $E_k \subset E'$, почти изометричное l_k^2 . Опять же для облегчения выкладок будем считать, что E_k изометрично l_k^2 , т. е. найдется такой изоморфизм $J: E_k \rightarrow l_k^2$, что $\|J\| = \|J^{-1}\| = 1$. Обозначим $J^{-1}e_i = x_i$ и определим элементы $x_i \in E$ так, чтобы

$$\|x_i\| = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}(x_i(x_i)) \geq \|x_i\| - \delta = 1 - \delta, \quad i = 1, \dots, k, \quad (11)$$

где $\delta > 0$ достаточно мало.

Покажем теперь, что элемент $u = \sum_1^k x_i \otimes y_i$ — искомый. Для оценки нормы $\|u\|_\wedge$ построим оператор $R: F \rightarrow l_k^2$, определенный формулой

$$Ry = \sum_1^k \bar{y}_i(y) e_i. \quad (12)$$

Пусть $\|y\| < 1$. Обозначим $\bar{y}_i(y) = c_i$, $i = 1, \dots, k$. Так как

$$|c_i| = |\bar{y}_i(y)| \leq \|L\|, \text{ то } \left(\sum_1^k |c_i|^2\right)^{1/2} \leq k^{1/2} \|L\|.$$

В силу произвольности $y \in S(F)$ из (12) вытекает, что

$$\|R\| \leq k^{1/2} \|L\|. \quad (13)$$

Взяв теперь оператор $T = \|L\|^{-1} k^{-1/2} j^{-1} R : F \rightarrow E'$, получим, используя (10)–(13), следующие соотношения:

$$\|T\| \leq 1 \text{ и } \operatorname{Re}((Ty_i), x_i) \geq \frac{1-\delta}{\|L\| k^{1/2}} \quad i = 1, \dots, k. \quad (14)$$

Заметив теперь, что выражение $(Ty)x$ определяет на $E \times F$ билинейный функционал с нормой, равной $\|T\|$, получим в силу (14)

$$\|u\|_\wedge \geq \left| \sum_1^k (Ty_i)x_i \right| \geq k^{1/2} \|L\|^{-1} (1-\delta). \quad (15)$$

Для оценки нормы $\|u\|_\vee$ выберем произвольно $x' \in S(E')$ и $y' \in S(F')$. Обозначим $x'(x_i) = a_i$, $y'(y_i) = b_i$.

Пусть y'_0 – сужение функционала y' на подпространство G , обозначим $(L')^{-1} y'_0 = f \in (l^p)'$, тогда $\|f\| \leq \|L^{-1}\|$.

Если $\{d_i\}_1^k$ есть такой набор, что $\sum_1^k |d_i|^p \leq 1$, то, учитывая (9) и то, что по построению $y_i \in G$, $i = 1, \dots, k$, получим

$$\left| \sum_1^k d_i b_i \right| = |y'_0 \left(\sum_1^k d_i y_i \right)| = |L' f \left(\sum_1^k d_i y_i \right)| = |f \left(\sum_1^k d_i e_i \right)| \leq \|f\| \leq \|L^{-1}\|.$$

Отсюда получаем $\left(\sum_1^k |b_i|^q\right)^{1/q} \leq \|L^{-1}\| (1/p + 1/q = 1)$. Так как $|x'_i| \leq 1$, то $|a_i| \leq 1$ и поэтому

$$\left| \sum_1^k a_i b_i \right| \leq \left| \sum_1^k 1 \right|^{1/p} \cdot \left(\sum_1^k |b_i|^q\right)^{1/q} \leq \|L^{-1}\| k^{1/p}.$$

В силу произвольности $x' \in S(E')$ и $y' \in S(F')$ получаем

$$\|u\|_\vee \leq \|L^{-1}\| k^{1/p}. \quad (16)$$

Сравнивая теперь (15) с (16) и учитывая (8), получаем утверждение (7) теоремы 2.

Идеи предыдущего доказательства позволяют установить и следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть E произвольно, а F – фактор-изоморфно некоторому l^p ($1 \leq p < 2$), т. е. существует линейный ограниченный оператор V с F на l^p . Обозначим $C = \sup\{M > 0 : M \cdot S(l^p) \subset V(S(F))\}$.

Тогда для любого натурального k и $\varepsilon > 0$ найдется элемент $u = \sum_1^k x_i \otimes y_i$ из $E \otimes F$ такой, что

$$\|u\|_{\wedge} \|u\|_{\vee}^{-1} \geq C \|V\|^{-1} k^{1/p-1/2} - \varepsilon. \quad (17)$$

Замечание 2. Условие теоремы означает, что пространство F содержит подпространство, изоморфное l^q ($1/p + 1/q = 1$), а из открытости отображения V следует, что $C > 0$.

В случае, когда F изоморфно некоторому l^p ($1 \leq p \leq \infty$), оценки теорем 2,3 можно усилить и получить утверждение, в неявном виде эквивалентное теоремам 2–4 Гротендика в (3), содержащим точные оценки (в асимптотическом смысле по степени k).

Следствие 1. Пусть E произвольно, а F изоморфно некоторому l^p ($1 \leq p \leq \infty$). Тогда для любого натурального числа k и $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $u = \sum_1^k x_i \otimes y_i$ из $E \otimes F$, что

$$\|u\|_{\wedge} \|u\|_{\vee}^{-1} \geq \frac{k^{1/2}}{\delta(F, l^p)} - \varepsilon.$$

Из теорем 2 и 3 и следствия 1 немедленно следует

Следствие 2. Пусть E произвольно. Если F содержит подпространство, изоморфное некоторому l^p ($2 < p \leq \infty$), либо F факторизоморфно некоторому l^p ($1 \leq p < 2$), либо F изоморфно l^2 , то $E \hat{\otimes} F \neq E \overset{\vee}{\otimes} F$.

Отметим, что конструкция, использованная в теоремах 1–3, позволяет доказать и следующие утверждения.

Теорема 4. Пусть E и F — произвольные пространства, F_k — некоторое k -мерное подпространство пространства F . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $x_i \in E$ и $y_i \in F_k$, $i = 1, \dots, k$, что для элемента $u = \sum_1^k x_i \otimes y_i$ из $E \otimes F$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{\wedge} \|u\|_{\vee}^{-1} \geq \frac{k^{1/2}}{\delta(F_k, l_k^2)} - \varepsilon.$$

Теорема 5. Пусть E и F — произвольные пространства, F_k — некоторое k -мерное подпространство пространства F . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $x_i \in E$ и $y_i \in F$, $i = 1, \dots, k$, что для элемента $u = \sum_1^k x_i \otimes y_i$ из $E \otimes F$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{\wedge} \|u\|_{\vee}^{-1} \geq \frac{k^{1/2}}{\delta(F_k, l_k^2)} - \varepsilon.$$

Из теорем 4 и 5 немедленно следует

Следствие 3. Пусть E произвольно, а пространство F таково, что существует возрастающая последовательность натуральных чи-

сез k_i и k_i -мерных пространств U_i , каждое из которых является подпространством либо пространства F , либо F' , и таких, что

$$\delta(U_i, U_i') \cdot k_i^{-1/2} \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty. \text{ Тогда } E \hat{\otimes} F = E \otimes F.$$

Ереванский государственный университет

Վ. Վ. ՈՍԿԱՆՅԱՆ

Քանակի տարածությունների տեղորական արտադրյալների մեծագույն և փոքրագույն $\otimes$ -նորմների մասին

Միցուք E -ն և F -ը անվերջ չափանի k -անախի տարածություններ են. $\wedge$ և $\vee$ -ը համապատասխանաբար մեծագույն և փոքրագույն $\otimes$ -նորմերը $E \otimes F$ -ում: Ելնելով F տարածության վրա դրված պալմաններից կառուցվում են համապատասխան k -չափանի* $u = \sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i \in E \otimes F$ էլեմենտները, որոնց համար դեհատվում է $A_k = \|u\|_{\wedge} \|u\|_{\vee}^{-1}$ թիվը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ A. Grothendieck, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 16, 1955. ² A. Grothendieck, Bol. Soc. Mat. São Paulo vol. 8, 1956. ³ A. Grothendieck, Bol. Soc. Mat. São Paulo, vol. 9, 1954. ⁴ A. Dvoretzky, Proc. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 1961.