ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 4

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

Д. Г. Асатрян, И. А. Сафарян

О функциях распределения, при которых ранговый критерий является локально наиболее мощным

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 15/VI 1979)

Рассмотрим гипотезу $H_0:\theta=0$ против альтернатив $H_1:\theta>0$ для функций распределения $G(x;\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant\varepsilon)$ в задаче о двух выборках. Обычно линейные ранговые статистики, применяемые для этой задачи, имеют вид

$$T_N(J)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EJ(U_{(R_i)}),\tag{1}$$

где E — символ математического ожидания, $J(u)$ — функция меток, $U_{(i)}$ — i-я порядковая статистика выборки объема $N=m+n$ из равномерного распределения на $(0, 1)$, R_i — ранг наблюдения y_i в объединенной упорядоченной выборке $x_1, \ldots x_m; y_1, \ldots, y_n$.

При некоторых ограничениях на плотность распределения локально наиболее мощный ранговый критерий (л. н. м. р. к.) для H_0 против H_1 существует и основан на статистике (1), причем функция меток определяется по заданному распределению как

$$J(F(x))=\frac{\left.\frac{\partial}{\partial\theta}g(x;\theta)\right|_{\theta=0}}{g(x;0)},\tag{2}$$

где обозначено $F(x)=G(x;0)$. Получение л. н. м. р. к. в виде (1) с функцией меток (2) при различных ограничениях на плотность распределения рассматривается в работах [1-3] и др.

Настоящая заметка посвящена решению обратной задачи, а именно—отысканию функций распределения вида

$$G(x;\theta)=\Phi(F(x);\theta),\tag{3}$$

при которых линейный ранговый критерий (1), основанный на заданной функции меток $J(u)$, является локально наиболее мощным.

1°. Будем предполагать, что функция меток $J(u)$ $(0<u<1)$ непрерывна и удовлетворяет условиям:

$$\int_0^1 J(u)du = 0,$$

$$\int_0^1 |J(u)|du < c.$$

Решение поставленной задачи может быть найдено с помощью следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $J(u; t)$ непрерывна по $0<u<1$ и $0\leqslant t\leqslant \varepsilon$ и удовлетворяет условиям:*

$$J(u; 0) = J(u), \tag{4}$$

$$\int_0^1 |J(u; t)|du \text{ сходится равномерно по } 0\leqslant t\leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

$$1 + \int_0^\theta J(u; t)dt > 0 \quad \text{при } u \in (0, 1), \tag{6}$$

$$\int_0^1 \int_0^\theta J(u; t)dudt = 0; \tag{7}$$

тогда критерий (1) *с заданной функцией меток $J(u)$ является л. н. м. р. к. при альтернативе*

$$\Phi(F; \theta) = F + \int_0^F \int_0^\theta J(u; t)dudt \tag{8}$$

для H_0 против H_1.

Доказательство. $\Phi(F; \theta)$, определенная в (7), является альтернативой, удовлетворяющей следующим условиям регулярности:

(а) плотности $g(x; \theta)$ и $g(x; 0)$ взаимно абсолютно непрерывны;

(б) $\Phi_F'(F; \theta)$ непрерывна по $0<F<1$, $\Phi_{F\theta}''(F; \theta)$ существует и непрерывна по $0<F<1$ и $0\leqslant\theta\leqslant\varepsilon$;

(в) $\int |\Phi_{F\theta}''(F; \theta)|dF$ сходится равномерно по $0\leqslant\theta\leqslant\varepsilon$.

Выполнение условий (б) и (в) очевидно, выполнение условия (а) следует из (6), поскольку

$$g(x; \theta) = \Phi_F'(F, \theta)g(x; 0) = \left\{1 + \int_0^\theta J(u; t)dt\right\} g(x; 0).$$

Используя схему получения л. н. м. р. к. в [1], можно показать, что для альтернативы $\Phi(F; \theta)$, удовлетворяющей условиям (а), (б), (в), такой критерий основан на статистике

$$\sum_{i=1}^{n} E\Phi'_{F\theta}(U_{(R_i)}; 0), \tag{9}$$

т. е. является критерием вида (1) с функцией меток

$$\Phi'_{u\theta}(u; 0) = J(u;\ 0) = J(u).$$

Действительно, критическая область л. н. м. р. к. имеет вид

$$\left.\frac{\partial P\{R\}}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} > c_\alpha,$$

где c_α — константа, соответствующая уровню значимости α, а $P\{R\}$ — совместное распределение рангов y-ов, которое при выполнении условия (а) может быть представлено в виде

$$P\{R\} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \cdot \frac{N!}{(R_1-1)!\ldots(N-R_n)!}\times$$

$$\times\int\cdots\int\limits_{0\le F_1\le\ldots\le F_n\le 1} \prod_{i=1}^{n} \Phi'_F(F;0)F_1^{R_1-1}\cdot\ldots\cdot F_n^{N-R_n}\,dF_1\cdot\ldots\cdot dF_n.$$

Выполнение условий (б) и (в) дает возможность дифференцировать это выражение под знаком интеграла, что приводит к (9). Теорема доказана.

2 . Построение по заданной функции меток $J(u)$ некоторой $J(u;t)$, удовлетворяющей условиям теоремы, в большинстве случаев довольно просто. Приведем несколько примеров известных ранговых критериев.

Пример 1. Очевидно в представлении (1) функция меток, соответствующая критерию Вилкоксона, является линейной. Рассмотрим

$$J(u) = 2u - 1.$$

Определим

$$J(u;t) = J(u)/(1+kt)^2,\quad k \geqslant 0.$$

Легко проверить, что условия (4)—(7) выполняются; таким образом из (8) получим

$$\Phi(F;\theta) = F + \frac{\theta}{1+k\theta}(F^2-F) = F\left(1-\frac{\theta}{1+k\theta}\right) + F^2\frac{\theta}{1+k\theta}.$$

При $k=0$ получаем известную [2] альтернативу для критерия Вилкоксона

$$\Phi(F;\theta) = (1-\theta)F + \theta F^2.$$

Пример 2. Легко убедиться, что при

$$J(u)=\{(r+1)u^r-1\}/r,\quad r>0$$

критерий (1) представляет полином степени r от рангов.

Определим $J(u;t)$ следующим образом:

$$J(u;t)=\frac{(J(u)-1)\left(1+\frac{t}{r+1}\right)+1}{\left\{1+\frac{tr}{r+1}(1-J(u))\right\}^{1/r+2}}.$$

Выполнение условий (5)—(7) нетрудно проверить, если заметить, что

$$J(u;t)=\left(\frac{1+t}{\left\{1+\frac{tr}{r+1}(1-J(u))\right\}^{1/r+1}}\right)'_t.$$

Из (8) получим:

$$\Phi(F;\theta)=\frac{F}{1+\theta(1-F^r)^{1/r}}. \qquad (10)$$

При $r=1$ имеем еще одну альтернативу, соответствующую критерию Вилкоксона

$$\Phi(F;\theta)=\frac{F}{1+\theta(1-F)}.$$

Можно показать, что (10) является альтернативой сдвига для распределения

$$F(x)=\left\{\frac{e^{rx}/r}{1+e^{rx}/r}\right\}^{1/r},\qquad x\geqslant 0$$

и альтернативой масштаба для распределения

$$F(x)=\left\{\frac{x^r/r}{1+x^r/r}\right\}^{1/r}.$$

Оба эти распределения получены в ([4]) при определении тех $F(x)$, для которых линейная ранговая статистика, основанная на данной $J(u)$, является асимптотически оптимальной.

П р и м е р 3. Функция меток, соответствующая критерию Муда ([3]), равна

$$J(u)=\frac{1}{2}\{3|2u-1|^2-1\},$$

в общем случае можно рассмотреть

$$J(u)=\frac{1}{r}\{(r+1)|2u-1|^r-1\},\qquad r>0.$$

Используя такую же $J(u;t)$, как в предыдущем примере, получим

$$\Phi(F;\theta)=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{2F-1}{[1+\theta-\theta|2F-1|^r]^{1/r}}\right\},$$

при $r=2$ соответствующая альтернатива имеет вид

$$\Phi(F;\theta)=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{2F-1}{[1+\theta-\theta|2F-1|^2]^{1/2}}\right\}.$$

Пример 4. Критерию нормальных меток ([3]) соответствует

$$J(u)=\Phi_0^{-1}(u),$$

где $\Phi_0^{-1}(u)$ — обратная функция стандартного нормального распределения. Определяя

$$J(u;t)=\{J(u)+t\}\exp\{((J(u)+t)^2-J^2(u))/2\},$$

убедимся, что такая $J(u;t)$ удовлетворяет условиям (4) — (7) и, следовательно, из (8) получим

$$\Phi(F;\theta)=\Phi_0(\Phi_0^{-1}(F)-\theta).$$

Можно заметить, что при $F(x)=\Phi_0(x)$ полученная $\Phi(F;\theta)$ является альтернативой сдвига нормального распределения.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
радиофизических измерений

Դ. Դ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, Ի. Ա. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Բաշխման ֆունկցիաներ, որոնց հանդեպ կարգային չափանիշը լոկալ ամենահզորն է

Գտնված է հավանականությունների բաշխման ֆունկցիաների մի դաս, որոնց հանդեպ նախօրոք տրված կարգային չափանիշը լոկալ ամենահզորն է։ Բերված են օրինակներ, որոնք ընդգրկում են Վիլկոքսոնի և Մուդի չափանիշները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. Capon*, Ann. Math. Stat., vol. 32, № 1 (1961). [2] *Э. Леман*, Проверка статистических гипотез, „Наука", М., 1964. [3] *Я. Гаек, З. Шидак*, Теория ранговых критериев, „Наука", М., 1971. [4] *P. W. Mielke*, J. Amer. Statist. Assoc., vol. 67, № 340 (1972).