

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

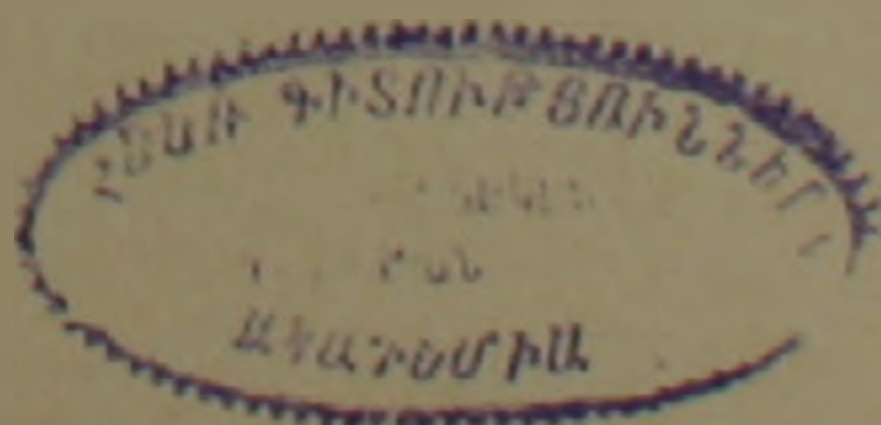
К. С. Казарян

О базисности подсистем тригонометрической системы в
 пространствах $L^p(d\mu)$, $1 \leq p < \infty$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 20/VIII 1979)

В работах ⁽¹⁻³⁾ был исследован вопрос о базисности в обычном смысле подсистем классических ортонормированных систем в весовых пространствах L^p . Был описан класс систем функций, которые не являются базисами ни в одном весовом пространстве L^p . В этот класс в частности входят все подсистемы тригонометрической системы и системы Уолша, полученные из этих систем удалением конечного числа функций. С другой стороны, было доказано, что системы, полученные удалением произвольного набора функций из системы Хаара, являются базисами в некоторых весовых пространствах L^p для любых $1 \leq p < \infty$. Из этого результата в частности следует, что для любых подсистем Уолша $\{W_n(x)\}_{n=k}^\infty$ существуют весовые функции $\psi_k(x) > 0$ такие, что $\{W_n(x)\}_{n=k}^\infty$ являются базисами в широком смысле в $L^p[\psi_k(x)dx]$, т. е. замкнуты минимальны в $L^p[\psi_k(x)dx]$ с полными относительно $L^p[\psi_k(x)dx]$ сопряженными системами и частичные суммы разложения любой функции из $L^p[\psi_k(x)dx]$ сходятся по подпоследовательностям $\{2^l - k\}_{l=k}^\infty$ (см. ⁽¹⁻³⁾). Такие системы будем называть базисами $L^p[\psi_k(x)dx]$ по подпоследовательностям $\{2^l - k\}_{l=k}^\infty$. Отметим, что впервые понятие базиса суммируемости было введено в работах ⁽⁴⁾ и ⁽⁵⁾.

Отметим также, что рассматривая все эти вопросы в пространствах $L^p(d\mu)$, где μ — положительная борелевская мера, получаем, что мера μ должна быть абсолютно непрерывной. Так как из общих результатов работы ⁽⁶⁾ имеем, что из замкнутости и минимальности систем вида $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ в пространствах $L^p(d\mu)$, $p \geq 1$ следует абсолютная непрерывность меры μ , в дальнейшем будем рассматривать только весовые пространства L^p . Для формулировки результатов введем некоторые определения.



Определение 1. Будем говорить, что функция $M(x)$, определенная на вещественной прямой, имеет особенность степени q ($1 \leq q \leq \infty$) в точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, если для любого интервала I , содержащего точку x_0 ,

$$|M(x)|^{-1} \in L^q(I).$$

Определение 2. Скажем, что функция $M(x)$ имеет в точке x_0 особенность степени q порядка α ($\alpha = 1, 2, \dots$), если существует некоторое положительное число ε_0 такое, что для любого ε ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$)

$$(x - x_0)^{\alpha-1} |M(x)|^{-1} \in L^q(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

и

$$(x - x_0)^\alpha |M(x)|^{-1} \in L^q(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть k — некоторое натуральное число и $M(x) \in L^p[0, 2\pi]$, $p \geq 1$. Предположим, что $M(x)$ периодически продолжена на всю вещественную ось.

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Система $\{M(x) \cos nx, M(x) \sin nx\}_{n=k}^\infty$ замкнута минимальна в $L^p[0, 2\pi]$;

2) Система $\{M(x) \cos nx, M(x) \sin nx\}_{n=k}^\infty$ является базисом в широком смысле пространства $L^p[0, 2\pi]$;

3) Существуют точки x_i ($1 \leq i \leq s$), $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_s < 2\pi$ и натуральные числа α_i ($1 \leq i \leq s$) такие, что $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 2k - 1$, функция $M(x)$ имеет особенность степени q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) только в точках x_i ($1 \leq i \leq s$) и в каждой точке x_i особенность имеет порядок α_i .

Эквивалентность условий 1) и 3) следует из теоремы 1 работы (2), если применить хорошо известную теорему об интерполировании с кратными узлами. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказывается с помощью таких же соображений, что и в работе (2) (см. стр. 322).

В отличие от системы Уолша для тригонометрической системы имеем, что системы вида $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ ни в одном весовом пространстве не являются базисами по фиксированной подпоследовательности. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть k — некоторое натуральное число и система $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ замкнута минимальна в весовом пространстве $L^p[\psi(x)dx]$, $1 \leq p < \infty$.

Тогда для любой последовательности натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots$) существует функция $f(x) \in L^p[\psi(x)dx]$ такая, что частичные суммы с номерами n_i разложения функции $f(x)$ по системе $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=1}^\infty$ расходятся в пространстве $L^p[\psi(x)dx]$.

Вместе с тем оказывается, что существуют весовые пространства $L^p[\psi(x)dx]$, где системы вида $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ являются базисами Чезаро для любого положительного чезаровского метода суммирования. Точнее, справедлива следующая

Теорема 3. Пусть k — любое натуральное число, $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2k-1} < 2\pi$ некоторые различные точки интервала $[0, 2\pi)$ и $1 < p < \infty$.

Тогда система $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ является базисом суммирования (C, α) в пространстве $L^p[\psi_k(x)dx]$ для любого $\alpha > 0$, где $\psi_k(x) = \left| \prod_{i=1}^{2k-1} (x - x_i) \right|^p$.

Базисность в широком смысле системы $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ в $L^p[\psi_k(x)dx]$ следует из теоремы 1, так как функция $M(x) = |\psi_k(x)|^{1/p}$ удовлетворяет условию 3) этой теоремы. Нужная для доказательства теоремы 3 оценка частичных сумм разложений по системе $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ получается из известных свойств (C, α) средних ядер Дирихле (см. (7), стр. 256—257).

Институт математики
Академии наук Армянской ССР
Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Ղ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

$L^p(dx)$, $1 < p < \infty$ տարածություններում էռանկյունաչափական սիստեմի էն-
րասիստեմների բազիսայնության մասին

Հոդվածում $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ սիստեմների համար, որտեղ k — բնական թիվ է, գտնված է կշռային այն $\psi(x) > 0$ ֆունկցիաների դասը, որոնց համար նշված սիստեմները $L^p[\psi(x)dx]$ տարածություններում հանդիսանում են բազիս լայն իմաստով: Ի տարբերություն Ուոլշի սիստեմի համար նախկինում ապացուցված արդյունքների, պարզվում է, որ ֆիքսված ենթահամարների համար $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=k}^\infty$ սիստեմները չեն հանդիսանում բազիս այդ ենթահամարներով և ոչ մի կշռային L^p տարածությունում: Պնդվում է նաև, որ ցուլություն ունեն կշռային L^p տարածություններ, որտեղ ասումնասիրվող սիստեմները հանդիսանում են Չեդարովի բազիս Չեդարովի բոլոր դրական դումարման մեթոդների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ К. С. Казарян, ДАН Арм. ССР, т. 65, № 5 (1977). ² К. С. Казарян, Analysis Math., № 1, 1978. ³ К. С. Казарян, Изв. АН Арм. ССР, т. 13, № 4 (1978). ⁴ В. Я. Козлов, ДАН СССР, т. 73, № 4 (1950). ⁵ В. Gelbaum, Duke Math. J., 17 (1950). ⁶ К. С. Казарян, „Stud. Math.“ (в печати). ⁷ А. Зигмунд, ГОНИ ИКТП СССР, М., 1939.