ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 3

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Л. А. Агаловян

О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 16/VI 1979)

Изучается пограничный слой и вопрос приведения трехмерной краевой задачи теории упругости к двумерной задаче для ортотропных оболочек. Асимптотическим методом выведены краевые условия для приведенной двумерной задачи, которые учитывают упругие свойства оболочки в перпендикулярных ее срединной поверхности сечениях и являются обобщением известных условий классической теории. Обсуждаются погрешности некоторых прикладных теорий оболочек.

1. Отнесем срединную поверхность оболочки к линиям кривизны α, β, ось γ направим по нормали к этой поверхности. Пусть главные направления анизотропии совпадают с направлениями координатных линий. На лицевых поверхностях $S^{\pm}$ оболочки заданы значения напряжений, а на боковой поверхности Γ ($\alpha=\alpha_0$) одно из часто встречающихся в приложениях условий:

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{\alpha\gamma}=0 \text{ (задача 1)}; \quad \sigma_{\alpha\alpha}=\sigma_{\alpha\beta}=w=0 \text{ (задача 2)};$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=v=w=0 \text{ (задача 3)}; \quad u=v=w=0 \text{ (задача 4)}; \tag{1. 1}$$

$$u=\sigma_{\alpha\beta}=w=0 \text{ (задача 5)}.$$

Решение уравнений теории упругости ортотропного тела [1] в области $\Omega=S\times[-h,+h]$, где S—срединная поверхность, $2h$—толщина оболочки, удовлетворяющее указанным условиям, складывается из проникающего (внутреннего) и типа погранслоя решений. Проникающее решение построено в [2], пограничный слой можно построить по процедуре, изложенной в [3-5]. В ортотропных оболочках он складывается из антиплоского $\overset{a}{Q}$ и плоского $\overset{п}{Q}$ погранслоев. Принимая в качестве неизвестных величин погранслоя несимметричные компоненты напряжений ([2]) и безразмерные перемещения u_α/h, u_β/h, u_γ/h, любая из них представляется в виде

$$Q=\lambda^{-q+p}\sum_{s=0}^{S}\lambda^{-s}Q^{(s)}, \quad (\Omega,\ Q), \tag{1.2}$$

где $\lambda=(h/R)^{-1/q}$, R — характерный размер оболочки; p, q — целые числа, характеризующие показатель изменяемости $t=p/q$ напряженного состояния. После подстановки (1.2) в преобразованные по формулам

$$\alpha-\alpha_0=R\lambda^{-q}\xi_1;\quad \beta=R\lambda^{-p}\eta;\quad \gamma=R\lambda^{-q}\zeta=h\zeta \tag{1.3}$$

однородные уравнения пространственной задачи теории упругости ([1]) получается итерационный процесс для определения величин $\overset{n}{Q}{}^{(s)}$, $\overset{n}{\Omega}{}^{(s)}$. Уравнения плоского погранслоя имеют структуру соответствующих уравнений для ортотропных пластинок ([3]), разница в свободных членах, которые в нашем случае приобретают вид

$$R_\alpha^{(s-q+p)}=-\xi_1^n d_{1n}\sigma_1^{(s-qn)}-\xi_1^m d_{2m}\sigma_{21}^{(s+p-q-qm)}-\zeta RR_{1m}\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-mq-q)}}{\partial\zeta}-$$

$$-k_{\beta m}R^{m+1}\xi_1^m(\sigma_1-\sigma_2)^{(s-mq-q)}-k_{\alpha m}R^{m+1}\xi_1^m(\sigma_{12}+\sigma_{21})^{(s-qm-q)}-2RR_{1m}\sigma_{13}^{(s-qm-q)}$$

$$R_\gamma^{(s-q+p)}=-\xi_1^n d_{1n}\sigma_{13}^{(s-qn)}-\xi_1^m d_{2m}\sigma_{23}^{(s+p-q-qm)}+R(R_{1m}\sigma_1+R_{2m}\sigma_2)^{(s-qm-q)}-$$

$$-R^{m+1}\xi_1^m(k_{\beta m}\sigma_{13}+k_{\alpha m}\sigma_{23})^{(s-q-qm)}$$

$$d_{1n}=\left(\frac{1}{A}\right)_n R^n\frac{\partial}{\partial\xi_1},\quad d_{2n}=\left(\frac{1}{B}\right)_n R^n\frac{\partial}{\partial\eta},\quad R_{1n}=\left(\frac{1}{R_1}\right)_n R^n\xi_1^n,\ (1,2), \tag{1.4}$$

где $k_{\alpha m}$, $k_{\beta m}$ — коэффициенты разложения геодезических кривизн $k_\alpha=$ $=\dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial A}{\partial\beta}$, $(\alpha,\ \beta)$ в ряд Тейлора по степеням $\alpha-\alpha_0$. Считаем, что в (1.4) и в дальнейшем по немым индексам n, m производятся суммирования в пределах $n\in[1,s]$, $m\in[0,s]$. $R^{(s)}\equiv 0$ при $s<0$, верхний индекс указывает номер приближения, начиная с которого появляется отличный от нуля член. Не приведены выражения для R_{u_α}, R_{u_β}, R_w, R_β, $R_{\alpha\beta}$ в силу их громоздкости. Величины антиплоского погранслоя определяются из уравнений:

$$\frac{1}{A_0}\frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial\zeta}=R_\gamma^{(s+p-q)}$$

$$\sigma_{12}^{(s)}+\zeta RR_{1m}\sigma_{12}^{(s-qm-q)}=\sigma_{21}^{(s)}+\zeta RR_{2m}\sigma_{21}^{(s-qm-q)} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23}^{(s)}+R_\beta^{(s-q+p)},\quad \frac{1}{A_0}\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\xi_1}=a_{66}\sigma_{12}^{(s)}+R_{\alpha\beta}^{(s-q+p)},$$

где, в частности,

$$R_\tau^{(s+p-q)} = -\xi_1^m d_{2m}\sigma_2^{(s-qm-q+p)} - \xi_1^n d_{1n}\sigma_{12}^{(s-qn)} - RR_{3m}\xi_1^m \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-qm-q)}}{\partial \xi_1} -$$

$$- R^{m+1}\xi_1^m[k_{2m}(\sigma_2-\sigma_1) + k_{3m}(\sigma_{12}+\sigma_{21})]^{(s-qm-q)} - 2RR_{2m}\sigma_{23}^{(s-qm-q)}. \qquad (1.6)$$

При $s<q-p$ укззанные системы становятся однородными и затухающее решение можно определить методом Фурье. При $s\geqslant q-p$ эти системы неоднородны и их следует решать, приписав всем величинам в одном случае индекс „а", в другом—„П". Таким образом, в ортотропных оболочках возникают два типа качественно различных, затухающих экспоненциально, напряженно-деформированных состояний. В первом главную роль играют величины антиплоского пограислоя $\overset{a}{Q}\{\overset{a}{\sigma}_{13}, \overset{a}{v}, \overset{a}{\sigma}_{23}\}$, которым сопутствуют величины плоского напряженно-деформированного состояния $\overset{a}{\Omega}\{\overset{a}{\sigma}_1, \overset{a}{\sigma}_2, \overset{a}{\sigma}_3, \overset{a}{\sigma}_{13}, \overset{a}{u}, \overset{a}{w}\}$, при этом $\overset{a}{Q}{}^{(s)}\neq 0$, $\overset{a}{\Omega}{}^{(s)}\equiv 0$ при $s<q-p$. Во втором, наоборот, и $\overset{п}{\Omega}{}^{(s)}\neq 0$, $\overset{п}{Q}{}^{(s)}\equiv 0$ при $s<q-p$. Антиплоский и сопутствующий ему плоский погранслой затухают как $\exp(-\sqrt{G_{23}/G_{12}}\,\pi A(\alpha_0)\xi_1)$ в симметричном напряженном состоянии и как $\exp\left(-\sqrt{G_{23}/G_{12}}\,\frac{\pi}{2}A(\alpha_0)\xi_1\right)$ в кососимметричном. Они могут стать проникающими при относительно малых жесткостях на сдвиг в поперечных сечениях оболочки, т. е. когда $\sqrt{G_{23}/G_{12}}\,\pi/2 = 0(h/R)$.

Плоский и сопутствующий ему антиплоский погранслои затухают как $\exp(-\mathrm{Re}\, z_1)$, где z_1—наименьший корень с $\mathrm{Re}\, z>0$ соответствующего характерного трансцендентного уравнения, вид которого зависит от знака $\Delta=(b_{13}+a_{55}/2)^2-b_{11}b_{33}$, где b_{ik}, a_{55}—упругие коэффициенты [5]. Выведенные в [4], эти уравнения могут быть представлены также в виде:

1) $\Delta=0$ (изотропное тело)

$$\sin 2\beta z \pm 2\beta z = 0 \qquad \beta = \sqrt{b_{33}/b_{11}}; \qquad (1.7)$$

2) $\Delta>0$ (ортотропное тело)

$$\omega \sin x \pm \sin \omega x = 0, \qquad (1.8)$$

где

$$x=(\beta_1+\beta_2)z, \qquad \omega=\frac{\beta_2-\beta_1}{\beta_1+\beta_2}, \qquad 0<\omega<1$$

$$\beta_1=\sqrt{\frac{b_{13}+(a_{55}/2)-\sqrt{\Delta}}{b_{11}}}, \quad \beta_2=\sqrt{\frac{b_{13}+(a_{55}/2)+\sqrt{\Delta}}{b_{11}}}; \qquad (1.9)$$

3) $\Delta<0$ (ортотропное тело)

$$\omega \sin x \pm \operatorname{sh} x = 0, \qquad (1.10)$$

где

$$x=2\beta z, \quad \omega=\alpha/\beta, \quad 0<\omega<1$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{\sqrt{b_{11}b_{33}}-(b_{13}+a_{55}/2)}{2b_{11}}},\quad \beta=\sqrt{\frac{\sqrt{b_{11}b_{33}}+(b_{13}+a_{55}/2)}{2b_{11}}}. \tag{1.11}$$

2. В силу однородности и линейности исходных уравнений для погранслоев их решения будут определены с точностью постоянного множителя, поэтому интеграл пространственной задачи будет иметь структуру

$$J=Q^{\text{вн}}+\lambda^{\varkappa}\overset{a}{Q}+\lambda^{\mu}\overset{n}{\Omega}, \tag{2.1}$$

где $\varkappa$, μ — целые числа и характеризуют интенсивность соответственно антиплоского и плоского погранслоев. Их значения, соответствующие конкретно поставленной краевой задаче, определяются единственным образом при сращивании внутреннего и типа погранслоя решений, т. е. при удовлетворении условиям (1.1) на боковой поверхности. Используя структуру решения внутренней задачи ([2]), а также погранслоя (1.2) и подставив (2.1) в (1.1), можно вывести условия, соответствующие внутреннней задаче, и условия для определения произволов в решениях антиплоского и плоского погранслоев. Граничные условия для приведенной двумерной внутренней задачи будем записывать в терминах классической теории оболочек ([1]).

В задаче 1 $\varkappa=q+p-c+d$, $\mu=q+d$, где $c=0$ при $t=p/q\leqslant 1/2$, $c=2p-q$ при $1/2\leqslant t<1$; $d=-c$, если $\sigma_\gamma\neq 0$ при $\gamma=\pm h$; $d=-p$, если $\sigma_\gamma=0$, но $\tau_{\alpha\gamma}\neq 0$ при $\gamma=\pm h$. Используя процедуру сращивания внутреннего и типа погранслоя решений ([3,5,6]) для определения внутреннего напряженно-деформированного состояния, получим такие условия

$$T_1=0,\quad S_{12}=0 \tag{2.2}$$

$$M_1-\underline{A_1h\sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}}\frac{1}{B}\frac{\partial H_{12}}{\partial\beta}}=0,\qquad N_1+\frac{1}{B}\frac{\partial H_{12}}{\partial\beta}=0,$$

где $A_1\approx 1{,}26$ — постоянная изотропного материала ([7]), подчеркнутый член есть поправка к классическому условию. Условия (2.2) обеспечивают определение внутреннего напряженного состояния с точностью $\varepsilon_{\text{в}}=0(h_*^{2-2t})$, $h_*=h/R$. Вблизи свободного края антиплоский погранслой имеет большую интенсивность, чем плоский: $\overset{n}{\Omega}=0(\lambda^{-p+c})\overset{a}{Q}$.

В задаче 2 $\varkappa=q+p-c+d$, $\mu=2q-p+d$, а приведенные условия для внутренней задачи имеют вид

$$T_1+\underline{h\frac{E_1}{E_3}\frac{\nu_{23}\nu_{32}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}D_2k_2T_2}=0;$$

$$S_{12}-\underline{h\frac{E_1}{E_3}\frac{\nu_{23}\nu_{32}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}D_2\frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial\beta}}=0$$

$$\text{при}\quad \alpha=\alpha_0; \tag{2.3}$$

$$M_1-\underline{A_1h\sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}}\frac{1}{B}\frac{\partial H_{12}}{\partial\beta}}=0;$$

$$w=0.$$

Вблизи боковой поверхности как плоский, так и антиплоский погранслои отличны от нуля и имеют интенсивности $O(\lambda^{q+d})$, $O(\lambda^{2p-c+d})$ соответственно.

В задаче 3 (шарнирное закрепление) $\varkappa=q+d$, $\mu=2q-p+d$ и приведенными условиями являются

$$\underline{T_1+h\frac{E_1}{E_3}\,\frac{\nu_{23}\nu_{32}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}}\,D_2k_3T_2=0, \quad v=0, \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0, \tag{2.4}$$

$$M_1=0, \qquad w=0$$

Вблизи края отличным от нуля является плоский симметричный погранслой (соответствующие величины порядка $\overset{n}{\Omega}=O(\lambda^{q+d})$), антиплоским же погранслоем можно пренебречь. Поэтому в смысле малонапряженности края это закрепление имеет преимущество перед (2.3).

В задаче 4 (жесткое защемление) $\varkappa=q+d$, $\mu=2q-p+d$, приведенными условиями являются

$$2hu-\underline{m_1h(a_{13}T_1+a_{23}T_2)}=0, \; v=0,$$

$$w=0, \; \gamma_1=0 \quad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0. \tag{2.5}$$

Вкладом антиплоского и изгибного плоского погранслоев в краевое напряженно-деформированное состояние можно пренебречь. Симметричный плоский погранслой же отличен от нуля и имеет интенсивность $\overset{n}{\Omega}=O(\lambda^{q+d})$.

В задаче 5 $\varkappa=q+p+d-c$, $\mu=2q-p+d$, соответствующие условия для двумерной задачи выглядят так:

$$2hu-\underline{m_1h\;(a_{13}\;T_1+a_{23}T_2)}=0$$

$$\underline{S_{12}+m_2h\nu_{32}\frac{1}{B}\,\frac{\partial}{\partial\beta}(a_{13}T_1+a_{23}T_2)}=0, \qquad \text{при} \quad \alpha=\alpha_0. \tag{2.6}$$

$$w=0, \; \gamma_1=0$$

Приводимые выше постоянные D_2, m_1 m_2 совпадают с соответствующими коэффициентами для пластинок ([8]) и являются константами материала.

В этой задаче вблизи боковой поверхности можно пренебречь изгибным плоским погранслоем. Отличными от нуля являются антиплоский и симметричный плоский погранслои. Напряжения плоского погранслоя порядка $O(\lambda^{q+d})$, а антиплоского — $O(\lambda^{2p-c+d})$ и соизмеримы с напряжениями внутренней задачи.

Теория Кирхгофа—Лява пренебрегает пограничными слоями. Поэтому по этой теории нельзя получить приемлемые результаты относительно распределения напряжений вблизи боковой поверхности. Из (2. 2)—(2. 6) следует также, что погрешность классической теории увеличивается с увеличением отношений G_{12}/G_{23}, E_1/E_3. Если же $G_{23} \gg G_{12}$, $E_3 \gg E_1$, то классическая теория асимптотически точна.

Уточненная теория типа Рейсснера учитывает антиплоский погранслой, но не учитывает влияние плоского погранслоя. В силу (2.2)—(2.6) по этой теории можно получить приемлемые результаты, когда жесткость на сдвиг в поперечных сечениях достаточно мала по сравнению с соответствующей жесткостью в срединной поверхности, а жесткости на растяжение—сжатие в указанных направлениях примерно одинаковы или в поперечном направлении больше. Вблизи же боковой поверхности по этой теории можно получить приемлемые результаты лишь при первой краевой задаче.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ԱՂԱԼՈՎՅԱՆ

Առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի բերումը երկչափի օրթոտրոպ թաղանթների համար և կիրառական որոշ տեսությունների սխալի մասին

Ուսումնասիրվում է սահմանային շերտը և առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի բերումը երկչափի օրթոտրոպ թաղանթների համար։ Ասիմպտոտիկ մեթոդով արտածվում են եզրային պայմաններ երկչափի բերված խնդրի համար։ Այդ պայմանները, լինելով ընդհանրացում դասական տեսության համապատասխան պայմանների, հաշվի են առնում թաղանթի նյութի առաձգական հատկությունները միջին մակերևույթին ուղղահայաց հատույթներում։ Ստացված են եզրի շրջակայքում լարումների վարքը բնութագրող մեծությունների ինտենսիվությունները։ Քննարկվում է դասական և Ռայսների տիպի կիրառական տեսությունների ճշտության հարցը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. А. Амбарцумян*, Общая теория анизотропных оболочек, «Наука», М., 1974. [2] *Л. А. Агаловян*, «Известия АН СССР», МТТ, № 1 (1972). [3] *А. Л. Гольденвейзер*, ПММ, т. 33, вып. 6 (1969). [4] *Л. А. Агаловян*, Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 26, № 2 (1973). [5] *Л. А. Агаловян*, Ученые записки ЕГУ, № 2 (1978). [6] *Л. А. Агаловян*, Ученые записки ЕГУ, № 3 (1978). [7] *А. Л. Гольденвейзер*, Теория упругих тонких оболочек, «Наука», М., 1976.