

УДК 517.522.3

МАТЕМАТИКА

Л. А. Шагинян

О пределах неопределенности Т-средних тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 26/VI 1979)

1. *Введение.* Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $S(a, b)$ — совокупность всех измеримых функций, которые принимают конечные значения п. в. (почти всюду) на отрезке (a, b) ; $\bar{S}(a, b)$ — совокупность всех измеримых функций, определенных п. в. на (a, b) , которые могут принимать также значения $+\infty$ и $-\infty$ на подмножествах (a, b) положительной меры.

Пусть T — некоторый линейный метод суммирования с матрицей $\|c_{ij}\|$ (c_{ij} — действительные числа, причем i — индекс строк, а j — индекс столбцов) и

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (1)$$

— некоторый ряд с действительными членами. Положим

$$S_n(\Omega, x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad t_n(\Omega, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} S_k(\Omega, x),$$

$$\bar{t}(\Omega, x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} t_n(\Omega, x), \quad \underline{t}(\Omega, x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} t_n(\Omega, x).$$

Если $t_n(\Omega, x)$ существуют в точке x , начиная с некоторого n , тогда числа $\bar{t}(\Omega, x)$ и $\underline{t}(\Omega, x)$ определены и называются, соответственно, верхним и нижним пределами неопределенности Т-средних ряда Ω в точке x , в частности они могут равняться $\pm\infty$.

Далее, обозначим через $\bar{t}^*(\Omega, a, b)$ и $\underline{t}_*(\Omega, a, b)$, соответственно, верхний и нижний пределы неопределенности по мере Т-средних ряда Ω на отрезке (a, b) .

Следуя Д. Е. Меньшову, введем следующее

Определение 1. Скажем, что ряд

$$\Omega' \sim \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$$

является подрядом (частичным рядом) ряда Ω , если для любого $k \geq 0$ имеем

$$f_k(x) = \begin{cases} f_k(x), \\ 0 \end{cases}$$

на отрезке (a, b) .

В работе (1) доказана

Теорема 1. Для любого конечнострочного регулярного метода T , определяемого матрицей $\|c_{ij}\|$, существует тригонометрический ряд

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (2)$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0;$$

2) для любых $F(x), G(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$; $G(x) \leq F(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$ можно определить подряд Ω' ряда Ω , для которого

$$F(x) = t^*(\Omega', -\pi, \pi) \quad G(x) = t_*(\Omega', -\pi, \pi). \quad (3)$$

Вопрос о том, для какого класса методов суммирований утверждение (3) можно заменить более сильным утверждением

$$F(x) = \bar{t}(\Omega', x), \quad G(x) = \underline{t}(\Omega', x) \text{ п. в. на } (-\pi, \pi), \quad (4)$$

является достаточно сложной задачей, так как даже для метода $(C, 1)$ неизвестно, могут ли ряды вида (2) суммироваться к $+\infty$ на множествах положительной меры.

Здесь трудность по существу обусловлена тем, что при построении ряда (2), удовлетворяющего требуемому условию, мы не имеем права игнорировать полностью ни одну пару функций из системы $\{\cos kx, \sin kx\}$, если даже она мешает построению.

Таким образом возникает более простая и в некотором смысле более естественная задача: описание класса тех методов суммирований, для которых существуют ряды вида

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos k_i x + b_i \sin k_i x \quad (k_1 < k_2 < \dots), \quad (5)$$

которые обладают следующим свойством: для любых $F(x), G(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$, $G(x) \leq F(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$, можно определить такой подряд Ω' ряда Ω , чтобы имели место соотношения (4).

Оказывается, что ряды вида (5), обладающие этим свойством, существуют для довольно широкого класса методов суммирований $\{T\}'$, именно, для всех вполне регулярных линейных методов, матрицы которых удовлетворяют следующему дополнительному условию:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_j c_{lj} = 0^*. \quad (*)$$

При этом можно добиться того, чтобы коэффициенты ряда (5) стремились к нулю со скоростью, близкой к допустимой, и вместе с тем система $\{\cos k_l x, \sin k_l x\}$ была "предельно редкой".

2. Основные теоремы. Справедлива следующая

Теорема 1. Для произвольной последовательности $T^{(l)} \in [T]'$ и произвольной функции $f(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$ существует ряд Ω вида (5), удовлетворяющий следующим условиям:

1) Ω суммируется к $f(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$ методами $T^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots$;

$$2) \sum_{l=1}^{\infty} |a_l|^{2+\varepsilon} + |b_l|^{2+\varepsilon} < +\infty, \text{ для любого } \varepsilon > 0;$$

$$3) \sum_{l=1}^{\infty} 1/k_l < +\infty, \{k_l\} \text{ — имеет плотность нуль};$$

для любых функций $F(x), G(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$, $G(x) < F(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$, существует подряд Ω' ряда Ω такой, что

$$I^{(l)}(\Omega', x) = G(x), \quad I^{(l)}(\Omega, x) = F(x) \text{ п. в. на } (-\pi, \pi)$$

для каждого $l = 1, 2, \dots$.

Как следствие получается

Теорема 2. Для произвольной функции $f(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$ существует тригонометрический ряд

$$\Omega \sim \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos k_l x + b_l \sin k_l x \quad (k_1 < k_2 < \dots),$$

обладающий следующими свойствами:

1) ряд Ω суммируется к $f(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом A (Абе́ля—Пуассона);

$$2) \sum_{l=1}^{\infty} |a_l|^{2+\varepsilon} + |b_l|^{2+\varepsilon} < +\infty \text{ для любого } \varepsilon > 0;$$

$$3) \sum_{l=1}^{\infty} 1/k_l < +\infty, \{k_l\} \text{ — имеет плотность нуль};$$

4) для произвольной функции $F \in \bar{S}(-\pi, \pi)$ существует подряд Ω' ряда Ω , который суммируется к $F(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом A .

Отметим, что точные аналоги теорем 1 и 2 имеют место и для системы Уолша — $\{W_k(x)\}_0^\infty$.

В частности получается

Теорема 3. Существуют ряды вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos k_l x + b_l \sin k_l x, \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_l W_{k_l}(x) \quad (k_1 < k_2 < \dots),$$

* Эти методы, впервые рассмотренные Д. Е. Меньшовым, в частности содержат все методы Чезаро положительного порядка — $(C, \alpha > 0)$.

удовлетворяющие условиям 2) и 3) теоремы 2, которые суммируются к $+\infty$ п. в., соответственно, на $(-\pi, \pi)$ и $(0, 1)$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом А.

Ряд, удовлетворяющий утверждениям теоремы 3, построен в работе (2). Относительно теоремы 3 отметим, что не выяснено, могут ли ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$$

суммироваться к $+\infty$ на множестве положительной меры методами $(C, 1)$ и А.

Заметим также, что редкость систем $\{\cos k_i x, \sin k_i x\}$ и $\{W_{k_i}(x)\}$ в приведенных утверждениях в определенном смысле близка к предельной, так как для лакунарных рядов эти утверждения не верны (3, 4). Наконец отметим, что приведенные теоремы остаются в силе, если в формулировках под подрядами ряда Ω вида (1) понимать ряды Ω' вида

$$\Omega' \sim \sum_{i=1}^{\infty} f_{k_i}(x).$$

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Եռանկյունաչափական շարքերի և Ուոլշի շարքերի T -միջինների աճողությունը
սահմանների մասին

Նշանակենք $\overline{S}(-\pi, \pi)$ — ով բոլոր չափելի ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք որոշված են $(-\pi, \pi)$ հատվածի համարյա բոլոր կետերում և կարող են ընդունել նաև $+\infty$ և $-\infty$ արժեքներ դրական չափ ունեցող բազմությունների վրա:

Հոգվածի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է:
Թեորեմ: Կամայական $f(x) \in \overline{S}(-\pi, \pi)$ ֆունկցիայի համար դոյություն ունի

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos k_i x + b_i \sin k_i x \quad (k_1 < k_2 < \dots)$$

տեսքի շարք, որը ունի հետևյալ հատկությունները.

1. Ω — ն հանրազումարվում է $f(x)$ — ին $(-\pi, \pi)$ հատվածի համարյա բոլոր կետերում, բոլոր $(C, \alpha > 0)$ մեթոդներով.

2. Կամայական $F(x), G(x) \in \overline{S}(-\pi, \pi)$ ֆունկցիաների համար, որոնք բավարարում են $G(x) \leq F(x)$ հ. ա. $(-\pi, \pi)$ — ի վրա առհավասարությունը.

դրություն ունի Ω -ի ենթաշարք, որի $(C, \alpha > 0)$ միջինների վերին և ստորին սահմանները համապատասխանաբար համընկնում են $F(x)$ և $G(x)$ ֆունկցիաների հետ $(-\pi, \pi)$ հատվածի համարյա բոլոր կետերում:

3. $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{2+\varepsilon} + |b_i|^{2+\varepsilon} < +\infty$ կամայական $\varepsilon > 0$ համար;

4. $\sum_{i=1}^{\infty} 1/k_i < \infty$ և $\{k_i\}$ ունի 0 խտություն:

Թեորեմի հանգույցն անհղի ունի նաև Ուոլշի սխեմի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. Е. Меньшов, Труды Мат. ин-та АН СССР, вып. 32, т. 2, (1978). ² Л. А. Ша-
линян, Мат. сб., 108 (150), № 3 (1979). ³ А. Зигмунд, On the convergence of lacunary
trigonometric series, Fund. math., 16 (1930). ⁴ В. Ф. Гапошкін, УМН, 21, №6 (1966).