ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 3

УДК 518.9.

МАТЕМАТИКА

А. А. Аракелян

О представлении задач принятия решений

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. А. Александряном 21/V 1979)

В статье приводится решение поставленной в [1] задачи существования универсального релятива. В качестве следствия доказывается существование универсального релятива для некоторых задач принятия решения.

Пусть A—топологическое пространство. Под топологическим полирелятивом будем понимать полирелятив $(A, (\rho_K)_{K \in K})$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $(A, (\rho_K)_{K\in K})$ наделен структурой полирелятива;

2. Для любой пары $(a, b) \in \rho_K$ существуют такие окрестности U_a и U_b соответственно точек a и b, что $U_a \times U_b \subset \rho_K$. Множество A называется полем полирелятива.

Всюду далее будем предполагать полирелятивы нерефлексивными. Примером топологического нерефлексивного полирелятива является определяемая следующим образом модель экономической системы с конечным числом участников.

Пусть E^l l-мерное евклидово пространство, $X_i \subset E^l$, $i=1, 2, \ldots, l$, $Y_k \subset E^l$, $k=1, 2, \ldots, m$, $Z_i = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik} Y_k$, $\sum\limits_{i=1}^{l} a_{ik} = 1$, $i=1, 2, \ldots, l$, $k=1, 2, \ldots, m$, $Z_S = \sum\limits_{i\in S} Z_i$, $S \subseteq L = \{1, 2, \ldots, l\}$, $X = \prod\limits_{i \in L} X_i$, $Y = \prod\limits_{k \in M} Y_k$, $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, $\{(X_i, \rho_i)\}_{i=1,\ldots,l}$, где $\rho_i \subseteq X_i \times X_i$ топологические релятивы $i=1, 2, \ldots, l$.

Определим полирелятив $(A, (\rho_S)_{S \subseteq L})$ следующим образом: $(x, \hat{x}) \in \rho_S$ тогда и только тогда, когда $(x_i, \hat{x}_i) \in \rho_i$, $i \in S$, $\sum\limits_{i\in S} x_i < \sum\limits_{i \in S} e_i + z_S$ для некоторого $z^S \in Z_S$.

Очевидно, что определенный таким образом полирелятив $(A, (\rho_S)_{S \subset L})$ является топологическим. Если определить отношения ρ_i следующим образом: $(x_i, \hat{x}_i) \in \rho_i \leftrightarrow x_i \geq \hat{x}_i$, $i \in L$, то ядро $U_{\succ}$ отношения $\succ$ [2] равно ядру U_ρ отношения $\rho = \bigcup\limits_{S \subset L} \rho_S$.

Отображение φ поля релятива (A, ρ) в поле релятива (B, σ) называется гомоморфизмом, если $\varphi \square \varphi(\rho) = \sigma \cap (\varphi(A) \times \varphi(A))$, где $\varphi(A)$ образ поля A при отображении φ. Если φ взаимнооднозначное отображение, то оно называется изоморфизмом.

Представлением топологического релятива (A, ρ) в топологический релятив (B, σ) будем называть непрерывное гомоморфное отображение из (A, ρ) в (B, σ). Если φ изоморфизм, то оно называется сильным представлением.

Будем говорить, что класс топологических релятивов $\mathbf{A}_2$ допускает представление релятивов класса топологических релятивов $\mathbf{A}_1$, если любой $(A, \rho) \in \mathbf{A}_1$ допускает такое представление f в $(A', \rho') \in \mathbf{A}_2$, что $f(a) \neq f(b)$ для любых $a \neq b$, $a, b \in A$. Если класс $\mathbf{A}_2$ состоит из единственного релятива (A', τ), то [1] будем говорить, что (A', τ) универсальный топологический релятив.

Пусть (A, τ) бикомпактный топологический релятив. Через $C(A)$ обозначим множество всех непрерывных на A функций. Введем норму $\|f\| = \max\limits_{x \in A} |f(x)|$. Тогда $C(A)$ станет B-пространством относительно нормы $\|f\|$. Пусть a — некоторый элемент из A. Поставим ему в соответствие функцию f_a, определенную следующим образом: $f_a(x) = f(a) \cdot f(x)$. Пусть далее $C_f = \{f_a\}_{a \in A}$, а функция f такая, что $f(a) \neq f(b)$ для любых $a \neq b$. Положим $C_f^a = \{f_a \cdot f_{a'}\}_{a' \in A}$. Через $L(C_f)$, $L(C_f^a)$ обозначим соответственно линейные оболочки множеств C_f, C_f^a. Поставим в соответствие элементу $a \in A$ отображение t_a из $L(C_f)$ в $L(C_f^a)$, определенное следующим образом: $t_a(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a'_i}) = f_a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_{a'_i}$.

Обозначим замыкание $L(C_f)$ через $\overline{L(C_f)}$. Так как $L(C_f^a)$ полное для любого $a \in A$, оператор f_a линейный, то [3] он допускает единственное распространение на все $\overline{L(C_f)}$ с сохранением нормы. Распространение оператора t_a на все $\overline{L(C_f)}$ также обозначим через t_a.

Положим $T_f = \{t_a\}_{a \in A}$. Определим топологию в T_f следующим образом: под ε-окрестностью $N(t_a, \varphi, \varepsilon)$ оператора t_a будем понимать множество $N(t_a, \varphi, \varepsilon) = \{f_{a'} \mid \|(t_a - t_{a'})\varphi\| < \varepsilon\}$, где φ — произвольный элемент из $L(C_f)$, а $\varepsilon > 0$ произвольно.

Тогда релятив (T_f, λ), где $\lambda = \{(t_a, t_{a'})\}_{(a, a') \in \tau}$, будет топологическим в смысле этой топологии.

Если определить отображение g_f поля A на поле T_f следующим образом: $g_f(a) = t_a$, $a \in A$, то это отображение будет представлением релятива (A, ρ) на релятив (T_f, λ).

Можно показать, используя лемму 5. 1 [4], что если поле A релятива (A, τ) является бикомпактным, связным топологическим пространством, отношение τ на A является отношением слабого упорядочения, т. е. асимметричным и отрицательно транзитивным, то существует вещественнозначная, положительная на всем A функция $f(x)$, которая непрерывна в топологии множества A и для которой выполнено условие: $(a, b) \in \epsilon$ тогда и только тогда, когда $f(a) > f(b)$, $a, b \in A$.

Следовательно, если в качестве отношения ι релятива (T_f, ι) рассмотреть отношение $(t_a, t_b) \in \iota \leftrightarrow t_a f(x) > t_b f(x)$, $x \in A$, то имеет место следующая

Теорема 1. *Если поле A релятива (A, ρ) бикомпактное, связное топологическое пространство, отношение ρ—отношение слабого упорядочения, то он допускает представление в классе релятивов с полями из линейных преобразований сепарабельных B-пространств.*

Теорема 2. *Если поле A релятива (A, ρ) бикомпактное, связное топологическое пространство, ρ—отношение слабого упорядочения, то он допускает представление в классе релятивов с полями из линейных преобразований подпространств пространства $C([0, 1])$.*

Пусть (A_α, ρ_α), $\alpha \in I$ система топологических релятивов. Под их композицией будем понимать релятив (A, ρ) с полем $A = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$, $\rho = \boxtimes_{\alpha \in I} \rho_\alpha$ определенным следующим образом: $(a, b) \in \rho$ тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha \in I$, что $(a_\alpha, b_\alpha) \in \rho_\alpha$ и $a_{\alpha'} = b_{\alpha'}$ для любого $\alpha' \neq \alpha$.

Теорема 3. *Если $A = \{(A_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ такая система релятивов, что поля A_α релятивов (A_α, ρ_α), $\alpha \in I$ являются связными, бикомпактными топологическими пространствами, ρ_α, $\alpha \in I$ являются отношениями слабого упорядочения, то существует универсальный бикомпактный топологический релятив для системы A.*

Из теорем 3 и 2 следует

Теорема 4. *Если $A = \{(A_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ такая система релятивов, что поля A_α релятивов (A_α, ρ_α), $\alpha \in I$ являются связными, бикомпактными топологическими пространствами, ρ_α, $\alpha \in I$ являются отношениями слабого упорядочения, то существует универсальный для A топологический релятив с полем из линейных преобразований декартова произведения подпространств пространства $C([0, 1])$.*

На множестве X^m $(m = 2, 3, \ldots)$, где X^m есть m-кратное декартово произведение одинаковых сомножителей $X \subset \prod_{i=1}^{n} X_i$, определим отношение E^m (см. [4]) следующим образом: $((x^1, x^2, \ldots x^m), (y^1, y^2, \ldots, y^m)) \in E^m$ тогда и только тогда, когда $m < 1$. $x^j, y^j \in X$ для $j = 1, 2, \ldots, m$, набор $x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^m$ является перестановкой набора $y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^m$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Из [4] (теорема 5. 5) и теоремы 4 следует

Теорема 5. *Пусть $\{(A_i^\alpha, \rho_i^\alpha)\}$, $i \in L$, $\alpha \in I$, где $L = \{1, 2, \ldots, n\}$ система топологических релятивов. Если*

1) (A_α, ρ_α) *композиция релятивов* $\{(A_i^\alpha, \rho_i^\alpha)\}_{i\in L}$ *для любого* $\alpha\in I$;

2) $\{((a, b), (c, d))\in E_2^\alpha;\ (c, a)\in\rho_\alpha$ *или* $(c, a)\in\varepsilon_\alpha\}$, *где* ε_α — *отношение эквивалентности на* A_α, *влекут* $(d, b)\in\rho_\alpha$ *для любого* $\alpha\in I$;

3) A_i^α *для любых* $\alpha\in I$, $i\in L$ *бикомпактные, связные топологические пространства;*

4) *отношение* ρ_α *является отношением слабого упорядочения для любого* $\alpha\in I$,

то существует универсальный для класса $\{(A_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *топологический релятив с полем из линейных преобразований декартова произведения подпространств пространства* $C([0, 1])$.

Под задачей принятия решений (5) будем понимать пару $(A, \succeq)$, где A — множество альтернатив и $\succeq$ отношение предпочтения, заданное на A.

Если в теореме 4 (теореме 5) под пространством A_α (под пространством $\{A_i^\alpha\}$, $i\in L$, $\alpha\in I$) понимать множество альтернатив, под отношениями ρ_α (под отношениями $\{\rho_i^\alpha\}$, $\{\rho_\alpha\}$, $i\in L$, $\alpha\in I$) понимать отношения предпочтения, $\alpha\in I$, то из теоремы 4 (теоремы 5) будет следовать существование универсального топологического релятива для соответствующего класса задач принятия решений.

Ереванский институт
народного хозяйства

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Լուծումներ ընդունելու խնդիրների ներկայացում

Հոդվածում դիտարկվում է ունիվերսալ ռելյատիվ գոյության խնդիրը։ Ապացուցվում է, որ եթե ռելյատիվը թույլ կարգավորված է և նրա դաշտը բիկոմպակտ է և կապված, ապա այն կարելի է ներկայացնել ռելյատիվների որոշակի դասի օգնությամբ։ Այս թեորեմի հիման վրա ռելյատիվների որոշ դասերի համար կառուցվում է ունիվերսալ ռելյատիվ, և որպես հետևություն ապացուցվում է ունիվերսալ ռելյատիվի գոյությունը մի քանի դասերի՝ լուծումներ ընդունելու խնդիրների համար։

Այսպես օրինակ ապացուցվում է,

Թեորեմ։ Եթե $A=\{(A_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ ռելյատիվների այնպիսի բազմություն է, որ (A_α, ρ_α), $\alpha\in I$ ռելյատիվների A_α դաշտերը կապված, բիկոմպակտ տոպոլոգիական տարածություններ են, ρ_α, $\alpha\in I$ թույլ կարգավորվածություններ են, ապա A բազմության համար գոյություն ունի ունիվերսալ տոպոլոգիական ռելյատիվ:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Г. Визинг*, УМН, 23, 6 (144) (1968). [2] *Х. Никайдо*, Выпуклые структуры и математическая экономика, «Мир», М., 1972. [3] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов*, Функциональный анализ, «Наука», М., 1977. [4] *П. Фишберн*, Теория полезности для принятия решений, «Наука», М., 1978. [5] *Э. Я. Вилкас*, В сб. «Мат. методы в социальных науках», вып. 1, 1971.