

УДК 517.534+519.21

МАТЕМАТИКА

А. А. Гольдберг, М. Н. Шеремета

О хребтовости суперпозиции целой функции и экспоненциального многочлена

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 7/V 1979)

Целая функция φ называется хребтовой (⁽¹⁾, стр. 43), если

$$(\forall (x, y) \in R^2) \{ |\varphi(x + iy)| \leq |\varphi(iy)| \}. \quad (1)$$

В 1962 г. И. В. Островский (⁽²⁾ (см. также (⁽¹⁾, стр. 63) показал, что если $g \neq \text{const}$ и f — целые функции, а $\varphi = g(f)$ — хребтовая функция, то либо f — многочлен с $\deg f \leq 2$, либо f — трансцендентная функция, рост которой не ниже нормального типа порядка 1. Эта теорема И. В. Островского дополнена результатами В. В. Зимогляда (⁽¹⁾ (см. также (⁽¹⁾, стр. 460). В настоящей статье мы продолжим изучение свойств функции f в случае хребтовости $g(f)$, а именно рассмотрим случай, когда f — экспоненциальный многочлен вида

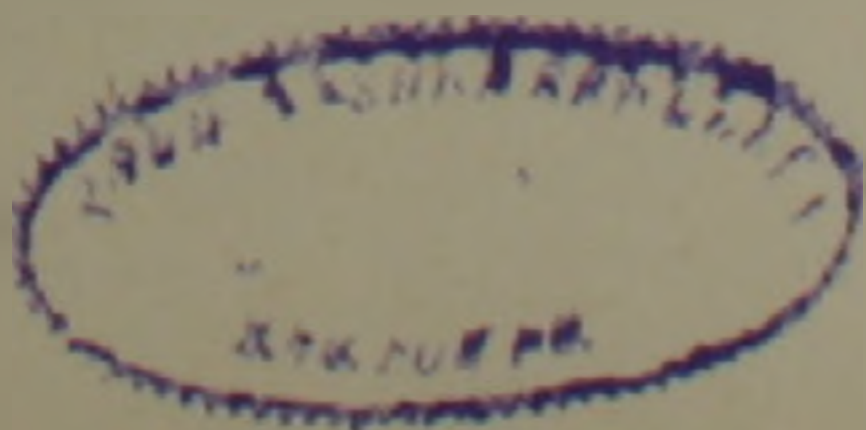
$$f(z) = \sum_{k=1}^n a_k e^{z \cdot i_k}, \quad z = x + iy, \quad (2)$$

где $a_k = |a_k| \exp(i\alpha_k)$ и все i_k разные. Обозначим $\gamma_k = \text{Re } i_k$, $\beta_k = \text{Im } i_k$ и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если $g \neq \text{const}$ — целая функция, а f — экспоненциальный многочлен вида (2) и $\varphi = g(f)$ — хребтовая функция, то $\gamma_k = 0$ при $1 \leq k \leq n$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что из (1) следует, что функция $\varphi = g(f)$ ограничена в каждой полосе $\{z: a \leq \text{Re } z \leq b\}$. Другие свойства хребтовых функций использоваться не будут.

Допустим теперь, что не все γ_k равны нулю. Тогда мы можем считать, что среди чисел γ_k имеется положительное. В противном случае можно сделать замену z на $-z$, что на хребтовости φ не отразится.



Итак, пусть $\gamma = \max\{\gamma_k : 1 \leq k \leq n\}$ и $\gamma = \gamma_1 = \dots = \gamma_p > \gamma_{p+1} > \dots \geq \gamma_n$. Тогда

$$f(z) = e^{11} e^{11\gamma} \sum_{k=1}^p a_k e^{-\beta_k y} e^{i\beta_k x} + \sum_{k=p+1}^n a_k e^{i\gamma_k x - \beta_k y} e^{i(\beta_k x + \gamma_k y)}, \quad (3)$$

Допустим сначала, что среди чисел $\beta_1, \dots, \beta_p$ имеются отрицательные. Положим $\beta = \min\{\beta_k : 1 \leq k \leq p\} < 0$. Очевидно, что среди $\beta_1, \dots, \beta_p$ существует единственное число, скажем β_1 , равное β . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p a_k e^{-\beta_k y} e^{i\beta_k x} &= a_1 e^{\beta_1 y} e^{-i|\beta|x} + \sum_{k=2}^p a_k e^{-\beta_k y} e^{i\beta_k x} = \\ &= a_1 e^{|\beta|y} e^{-i|\beta|x} (1 + \psi_1(x, y)), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\psi_1(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ равномерно относительно $x \in R$, т. е. для всякого достаточно малого $\delta > 0$ при $y \geq a = a(\delta)$ и для всех $x \in R$ выполняется $|\psi_1(x, y)| \leq \delta/2$. Из (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= a_1 e^{i\gamma + |\beta|y} e^{i(\gamma y - |\beta|x)} (1 + \psi_1(x, y)) + \sum_{k=p+1}^n a_k e^{i\gamma_k x - \beta_k y} e^{i(\beta_k x + \gamma_k y)} = \\ &= a_1 e^{i\gamma + |\beta|y} e^{i(\gamma y - |\beta|x)} (1 + \psi(x, y)), \end{aligned}$$

где $|\psi(x, y)| < \delta$ при $x \geq x_0(\delta)$ и $a \leq y \leq a + 6\pi/\gamma$, $a = a(\delta)$. Так как $g(f)$ ограничена в полосе $\{z : a \leq \operatorname{Im} z \leq a + 6\pi/\gamma\}$, откуда следует, что при $x \geq x_0(\delta)$ и $a \leq y \leq a + 6\pi/\gamma$ выполняется

$$|g(a_1 e^{i\gamma + |\beta|y} e^{i(\gamma y - |\beta|x)} (1 + \psi(x, y)))| \leq B(\delta), \quad (5)$$

где $B(\delta)$ — некоторая положительная постоянная. Положив в (5) $x = 2\pi n/|\beta|$, $n \in N$, получаем, что при $n \geq n_0$ и $a \leq y \leq a + 6\pi/\gamma$ выполняется

$$\left| g\left(|a_1| e^{2\pi n\gamma/|\beta|} e^{|\beta|y} e^{i(\gamma y + \pi)} \left(1 + \psi\left(\frac{2\pi n}{|\beta|}, y\right)\right)\right)\right| \leq B(\delta),$$

т. е. функция g ограничена на кривой

$$C_n = \left\{ z : z = |a_1| e^{2\pi n\gamma/|\beta|} e^{|\beta|t} e^{i(\gamma t + \pi)} \left(1 + \psi\left(\frac{2\pi n}{|\beta|}, t\right)\right), a \leq t \leq a + 6\pi/\gamma \right\},$$

имеющей форму спирали, причем $\left|\psi\left(\frac{2\pi n}{|\beta|}, t\right)\right| < \delta$ при $n \geq n_0$ и $a \leq t \leq a + 6\pi/\gamma$. Расстояние $\operatorname{dist}(0, C_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а приращение $\operatorname{Arg} z$ на C_n , благодаря произвольности числа δ , близко к 6π , т. е. спираль C_n обходит начало координат приблизительно 3 раза.

С другой стороны, если в (5) взять $y = a = a(\delta)$, получаем

$$|g(|a_1| e^{i\gamma} e^{|\beta|a} e^{-i(|\beta|x - \gamma t - \pi)}) (1 + \psi(x, a))| \leq B(\delta),$$

т. е. функция g ограничена на кривой

$$\Gamma = \{z : z = |a_1|e^{i\tau}e^{i\beta/a}e^{-i(|\beta|/\alpha\tau - \alpha_1)}(1 + \psi(t, a)), \quad x_0(\delta) \leq t < \infty\},$$

также имеющей вид спирали, но обходящей начало координат в противоположном к обходу C_n направлении и уходящей в ∞ . При достаточно больших n спираль Γ пересекает спираль C_n хотя бы в двух точках таких, что приращение $\text{Arg } z$ на дуге C_n между этими точками больше π . Поэтому можно найти односвязную область G_n такую, что $0 \in G_n$, $\partial G_n \subset \Gamma \cup C_n$ и $\text{dist}(0, \partial G_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Так как на ∂G_n функция g ограничена числом $B(\delta)$, то она ограничена этим числом $B(\delta)$ в области G_n . Отсюда следует, что $g \equiv \text{const}$, что невозможно.

Если среди чисел $\beta_1, \dots, \beta_p$ нет отрицательного, но есть положительное, то рассуждения в этом случае остаются такими же, но теперь нужно устремлять $y \rightarrow -\infty$, т. е. рассматривать промежуток $[-a - 6\pi/\gamma, -a]$, $a = a(\delta) > 0$. При этом обходы начала координат кривыми C_n и Γ меняются на противоположные, и в этом случае также получаем, что $g \equiv \text{const}$, что невозможно.

Предположим наконец, что среди чисел $\beta_1, \dots, \beta_p$ нет ни отрицательных, ни положительных. Тогда $p = 1$ и $\beta_1 = 0$. Поэтому в данном случае из (3) имеем

$$f(z) = |a_1|e^{i\tau}e^{i(\gamma y + \alpha_1)}(1 + \psi(x, y)),$$

где $\psi(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по y из каждого конечного промежутка. Из последнего равенства, как и выше, находим, что

$$|g(|a_1|e^{i\tau}e^{i(\gamma y + \alpha_1)}(1 + \psi(x, y)))| \leq B \quad (6)$$

для всех $(x, y) \in R^2$, где $\psi(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно относительно $y \in [0, 6\pi/\gamma]$, а B — некоторая положительная постоянная. Положив в (6) $x = n$, $n \in N$, получаем, что функция g ограничена на кривой

$$C_n = \{z : z = |a_1|e^{i\tau}e^{i(\gamma t + \alpha_1)}(1 + \psi(n, t)), \quad 0 \leq t \leq 6\pi/\gamma\},$$

имеющей форму спирали, причем $\text{dist}(0, C_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и приращение $\text{Arg } z$ на C_n при достаточно больших n близко к 6π . Если же в (6) взять $y = 0$, то получим, что функция g ограничена на кривой

$$\Gamma = \{z : z = |a_1|e^{i\tau}e^{i\alpha_1}(1 + \psi(t, 0)), \quad t \geq 0\},$$

которая, начиная с некоторого места, лежит в некотором углу достаточно малого раствора. Поэтому существует односвязная область G_n такая, что $0 \in G_n$, $\partial G_n \subset \Gamma \cup C_n$, $\text{dist}(0, \partial G_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и на ∂G_n функция g ограничена, а значит, $g \equiv \text{const}$, что невозможно.

Отметим, что теорема 1 допускает различные обобщения. Укажем на одно из них.

Теорема 2. Пусть $g = \text{const}$ — целая функция, f — целая функция, представленная абсолютно сходящимся в S рядом Дирихле

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\{\lambda_k z\}, \quad (7)$$

и $g(f)$ — хребтовая функция. Тогда, если множество $\Lambda = \{\lambda_k\}$ ограничено и множество его предельных точек $\Lambda' \in \text{conv } \Lambda$, то $\text{Re } \lambda_k = 0$ для всех k и множество Λ конечное.

Заметим, что если множество Λ неограничено, то теорема 2, вообще говоря, не верна. Действительно, по теореме А. Ф. Леонтьева ((4), стр. 481) хребтовую функцию e^{i^2} можно представить рядом (7) с показателями $\lambda_k \rightarrow \infty$, лежащими на трех различных лучах.

Дополнительную информацию о коэффициентах a_k в (2) можно получить при некоторых достаточно сильных ограничениях на показатели $\lambda_k = i\beta_k$ и на функцию g .

Теорема 3. Пусть

$$f(z) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\beta_j z}, \quad 0 \neq \beta_j \in R, \quad -\infty < l < n < +\infty, \quad (8)$$

$a_n \neq 0$, $a_1 \neq 0$, g — многочлен степени m , а $\varphi = g(f)$ — хребтовая функция. Тогда существуют числа $\alpha \in R$ и $\alpha^* \in R$ такие, что $\text{Im}(a_j e^{i\alpha}) = 0$ при $0 < j \leq n$ и $\text{Im}(a_j e^{i\alpha^*}) = 0$ при $0 > j \geq l$. Если $l < 0 < n$, то $\arg(a_n/a_1) = 2\pi q/m$ при некотором целом q .

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что $a_n > 0$ и φ — нормированная хребтовая функция. Тогда $\varphi(iy) > 0$ при $y \in R$. Другие свойства хребтовых функций при доказательстве использоваться не будут. Можно считать также, что $m \geq 2$, ибо при $m=1$ теорема 3 тривиальна. Мы будем рассматривать только случай $l < 0 < n$, в других случаях доказательство лишь упрощается. Обозначим $e^{-\beta y}$ через v . Тогда

$$f(iy) = p(v) = \sum_{j=1}^n a_j v^j.$$

Пусть $g(z) = b_m z^m + \dots + b_0$, $b_m \neq 0$. Поскольку $\varphi(iy) = \varphi_1(v) = A_{mn} v^{mn} + \dots + A_{ml} v^{ml}$ принимает положительные значения при $0 < v < \infty$, то $\text{Im} A_k = 0$, $ml \leq k \leq mn$ и $A_{mn} > 0$, $A_{ml} > 0$. Отсюда следует, что $A_{mn} = b_m a_n^m > 0$, $b_m > 0$, $A_{ml} = b_m a_l^m > 0$ и $\arg(a_n/a_l) = 2\pi q/m$ при некотором целом q . Если $g_1(z) = b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0$, то наибольшая степень v в $g_1(p(v))$ не превышает $n(m-1)$. Значит,

$$b_m [p(v)]^m = \sum_{k=n(m-1)+1}^{nm} A_k v^k + \sum_{k=ml}^{n(m-1)} B_k v^k.$$

Используя известную полиномиальную формулу ((5), стр. 80), при $nm \geq k \geq n(m-1)+1$ можно записать

$$A_k = b_m \sum_{(n,l)}^{(k,m)} \frac{m!}{s_n! \dots s_l!} a_n^{s_n} \dots a_l^{s_l}, \quad (9)$$

где знак $\sum_{(n,l)}^{(k,m)}$ означает суммирование по всем $(s_n, \dots, s_l)$, удовлетворяющим условиям: 1) $s_j \in Z_+$, $s_j \leq m$, $1 \leq j \leq n$; 2) $s_n + \dots + s_l = m$ и 3) $ns_n + \dots + ls_l = k$.

По предположению $a_n > 0$. Допустим, что уже доказано, что $a_j \in R$ при $\mu + 1 \leq j \leq n$, $1 \leq \mu \leq n-1$. Докажем, что $a_\mu \in R$. Положим в 3) $k = n(m-1) + \mu$. Тогда все $s_j = 0$ при $1 \leq j \leq \mu-1$. Действительно, допустив, что $s_j \geq 1$, получаем $ns_n + \dots + ls_l \leq js_l + n(m-s_l) = mn - s_l(n-j) \leq mn - (n-\mu+1) < k$, т. е. приходим к противоречию. Если $s_\mu \neq 0$, то $s_\mu = 1$, ибо, допустив, что $s_\mu \geq 2$, получаем $ns_n + \dots + ls_l \leq \mu s_\mu + n(\mu - s_\mu) = mn - s_\mu(n-\mu) \leq mn - 2(n-\mu) < k$. Теперь (9) можно переписать в виде

$$A_k = b_m \left\{ a_\mu \sum_{(n,\mu+1)}^{(n(m-1), m-1)} \frac{m!}{s_n! \dots s_\mu!} a_n^{s_n} \dots a_{\mu+1}^{s_{\mu+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{(n,\mu+1)}^{(k,m)} \frac{m!}{s_n! \dots s_{\mu+1}!} a_n^{s_n} \dots a_{\mu+1}^{s_{\mu+1}} \right\}. \quad (10)$$

Обе суммы в (10), в силу предположения индукции, действительные. Если $\mu = n-1$, то очевидно, что первая сумма в (10) состоит лишь из одного слагаемого ma_n^{m-1} . Покажем, что это верно и при $\mu \leq n-2$.

Действительно, из равенств $s_n + \dots + s_{\mu+1} = m+1$ и $ns_n + \dots + (\mu+1)s_{\mu+1} = n(m+1)$ имеем $s_{n-1} + 2s_{n-2} + \dots + (n-\mu-1)s_{\mu+1} = 0$, откуда $s_{n-1} = \dots = s_{\mu+1} = 0$, и снова первая сумма в (10) равна $ma_n^{m-1} > 0$. Так как $A_k \in R$, $b_m > 0$, то $a_\mu \in R$.

Таким образом, доказано, что $\operatorname{Im} a_j = 0$ при $0 < j \leq n$, если $a_n > 0$. В общем случае $\operatorname{Im}(a_j e^{iz}) = 0$, $0 < j \leq n$, где $z = -\arg a_n$. Утверждение о a_j , $1 \leq j \leq 0$, получаем, приведя его к предыдущему, обозначая теперь через v величину e^{3v} .

Приведем примеры, указывающие на невозможность усиления теоремы 3 в различных направлениях.

I. Число q , выступающее в теореме 3, может быть любым наперед заданным целым числом. Действительно, легко показать, что $(u^m + u^{-m})/2 = P_m(u + u^{-1})$, где P_m — некоторый многочлен степени m . Положив $u = e^{iq\pi/m} e^{iz}$, получаем $\cos mz = (-1)^q P_m(e^{iq\pi/m} e^{iz} + e^{-iq\pi/m} e^{-iz}) = g(f(z))$, где $g(z) = (-1)^q P_m(z)$ и $f(z) = e^{iq\pi/m} e^{iz} + e^{-iq\pi/m} e^{-iz}$. Здесь $\varphi(z) = \cos mz$ — целая характеристическая функция.

II. Даже при $l=0$, $n \geq 1$, $a_n > 0$, нельзя утверждать, что $a_0 \in R$. Действительно, пусть $f(z) = e^{iz} + i$, $g(z) = z^2 - 2iz - 1$. Тогда $\varphi(z) = g(f(z)) = e^{2iz}$ — целая характеристическая функция.

III. Если $l=1$, $a_n > 0$, но g — целая трансцендентная функция, то не обязательно все $a_j \in R$. Действительно, пусть $f(z) = e^{2iz} - 2ie^{iz}$, $g(z) = -\frac{1}{\operatorname{ch} \pi} \cos \pi \sqrt{1-z}$. Тогда $\varphi(z) = g(f(z)) = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi} \operatorname{ch}(\pi e^{iz})$ — целая характеристическая функция.

IV. Даже если $l=0$, $a_n > 0$, $a_j \in R$ при $0 \leq j \leq n$, а g — многочлен степени ≥ 2 , нельзя утверждать, что все $a_j \geq 0$, на что указывает пример (¹), стр. 47) $f(z) = 1 + 2e^{iz} - e^{2iz} + 3e^{3iz} + 3e^{4iz}$, $g(z) = z^2/4$ и $\varphi(z) = g(f(z)) = 1/64(1 + 4e^{iz} + 2e^{2iz} + 2e^{3iz} + 19e^{4iz} + 6e^{5iz} + 3e^{6iz} + 18e^{7iz} + 9e^{8iz})$ — целая характеристическая функция.

Авторы выражают глубокую благодарность Н. В. Островскому за ценные замечания.

Львовский государственный университет

Ա. Ա. ԴՈՒԴԵՐԳ, Մ. Ն. ՇՆՐԵՄՆՏԱ

Ամբողջ ֆունկցիայի և էքսպոնենցիալ բազմանդամի սուպերպոզիցիայի բաժանման մասին

Ապացուցվում է, որ եթե $q(z) \equiv \text{const}$ — ամբողջ ֆունկցիա է, f — էքսպոնենցիալ բազմանդամ է i_k ցուցիչներով, իսկ $g(f)$ — թամբալին ֆունկցիա է, ապա $\text{Re } i_k = 0$ ($1 \leq k \leq n$):

Այն դեպքում, երբ g — բազմանդամ է, իսկ

$$i_k = k\beta i \quad (\beta > 0, -\infty < l \leq k \leq n + \infty)$$

ստացված է նաև որոշ ինֆորմացիա f էքսպոնենցիալ բազմանդամի զործակիցների վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒՅՈՒՆ

¹ Ю. В. Линник, Н. В. Островский, Разложение случайных величин и векторов, «Наука», М., 1972. ² Н. В. Островский, ДАН СССР, т. 143, № 3 (1962). ³ В. В. Зимогляд, Труды ФТИНТ АН УССР, Мат. физика, функ. анализ, вып. 1, 1969. ⁴ А. Ф. Леонтьев, Ряды экспонент, «Наука», М., 1976. ⁵ И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко, Элементы комбинаторики, «Наука», М., 1977.