ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. В. Бахшецян

О перестановках системы Уолша

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 12/VI 1979)

Пусть $\{f_k\}_0^\infty$ и $\{g_k\}_0^\infty$ — две перестановки системы Уолша*.

Определение. *Системы* $\{f_k\}$ *и* $\{g_k\}$ *называются сильно изоморфными, если существует сохраняющее меру отображение* $T:[0, 1]\to[0, 1]$, *которое взаимно-однозначно всюду за исключением, быть может, счетного множества, и для любого* k

$$f_k(Tx)=g_k(x) \qquad (x\in[0,\ 1]).$$

Если же $\{f_k\}$ *и* $\{g_k\}$ *— перестановки системы Уолша внутри „пачек", то назовем их кусочно-изоморфными, если для любого* n *существует сохраняющее меру взаимно-однозначное отображение* T_n: $:[0, 1]\to[0, 1]$ *такое, что*

$$f_k(Tx)=g_k(x) \qquad (k=2^n,\ 2^n+1, \ldots, 2^{n+1}-1).$$

Очевидно, что ряды по сильно изоморфным системам неразличимы в вопросах сходимости в том или ином смысле. Известно, что системы Уолша и Уолша—Пэли сильно изоморфны (2), (3), а системы Уолша — Пэли и Уолша—Качмажа кусочно-изоморфны (2)**, но не сильно изоморфны (см., например, (3)).

Мы будем рассматривать класс Ω тех перестановок системы Уолша—Качмажа $\Psi=\{\psi_k\}_0^\infty$, которые кусочно-изоморфны системе Уолша—Качмажа.

В работе (2) вводятся *линейные* перестановки. В несколько иной терминологии эти же перестановки рассматривались и в работе (3), при этом оказывается (2,3), что класс линейных перестановок совпадает с классом сильно изоморфных перестановок. Далее в (2) опре-

---

* Определение систем Уолша, Уолша—Пэли и Уолша—Качмажа см., например, в (1).

** Этот результат одновременно и независимо от работы (2) был получен также Р. И. Овсепяном (не опубликовано).

деляются *кусочно-линейные* перестановки, которые задаются последовательностью матриц

$$P_n = (p_{ij}^n)_{i,j=0}^n \quad p_{ij}^n = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Из определения следует, что каждая кусочно-линейная перестановка является кусочно-изоморфной. Оказывается, что имеет место в некотором роде и обратное утверждение.

Теорема 1. *Ω можно представить в виде объединения непересекающихся классов попарно сильно изоморфных перестановок, из которых ровно одна кусочно-линейна.*

Пусть $\sigma \in \Omega$. Тогда по теореме 1 существует кусочно-линейная перестановка σ_0 такая, что системы $\{\psi_{\sigma(k)}\}$ и $\{\psi_{\sigma_0(k)}\}$ сильно изоморфны. Далее, пусть перестановка σ_0 задается последовательностью матриц (1). Через P_n^* обозначим транспонированные матрицы P_n, а через σ_0^* кусочно-линейную перестановку, порожденную последовательностью $\{P_n^*\}_0^\infty$. Тогда справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы Е. М. Семенова ([4]) (которой мы пользуемся для доказательства нашего утверждения).

Теорема 2. *Пусть $p \neq 2$, $p > 1$ и $\sigma \in \Omega$. Для того, чтобы существовал линейный ограниченный оператор $A: L^p \to L^p$ такой, что $A\psi_n = \psi_{\sigma(n)}$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого C и для любого n выполнялось неравенство*

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=2^k n}^{2^k n + 2^k - 1} \Delta_{\sigma_0^*(i)}\Big) \leqslant C\, 2^{-n} \quad \text{при} \quad p > 2$$

и

$$\operatorname{mes}\Big(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{i=2^k n}^{2^k n + 2^k - 1} \Delta_{\sigma_0^{*-1}(i)}\Big) \leqslant C\, 2^{-n} \quad \text{при} \quad p < 2,$$

где σ_0^{*-1} — перестановка, обратная σ_0^*, $\Delta_k = \left[\dfrac{j-1}{2^m}, \dfrac{j}{2^m}\right]$ $(m = [\log_2 k]$, $j = k - 2^m)$.

Отсюда, в частности, вытекает

Теорема 3. *Пусть $p \geqslant 1$, $p \neq 2$. Не существует линейного ограниченного оператора $A: L^p \to L^p$ такого, что $A\psi_n = w_n$ $(n = 0, 1 \ldots)$, где $W = \{w_n\}_0^\infty$ — система Уолша — Пэли.*

Таким образом, система Уолша — Качмажа не является ни сильно изоморфной, ни даже изоморфной в обычном смысле (теорема 3) системе Уолша. И тем не менее, при $p > 1$ она базис и система сходимости в L^p. Для $p \geqslant 2$ это следует из оценки

$$\|\sup_m |\sum_1^m a_n(f)\psi_n(x)|\|_p \leqslant A_p \|f\|_p \quad \text{для любого } f \in L^p, \tag{2}$$

которую при $p = 2$ для кусочно-линейных перестановок получил Ф. Шипп ([2]), а при $p > 2$ для некоторого класса перестановок, который формально уже класса перестановок, кусочно-изоморфных системе Уолша—Пэли (см. ниже, теорему 4)—У.-С. Янг [5], причем У.-С. Янг пользуется методом Карлесона-Ханта*.

Из оценки (2) по соображениям двойственности следует, что система Ψ—базис и в L^p, $1<p<2$. Однако утверждение, что Ψ—система сходимости в L^p ($p<2$), доказывается другим методом [5,6]. Оценка типа (2) для $p<2$ неизвестна.

Покажем, что для $p\geqslant 2$ (2) является следствием того, что Ψ кусочно-изоморфна системе Уолша—Пэли [2], для которой оценка типа (2) известна [7] при $p>1$. Собственно, эту идею использовал Ф. Шипп для получения оценки (2) при $p=2$ [2].

Теорема 4. *Для любого $p\geqslant 2$ существует постоянная A_p такая, что для произвольной системы $G=\{g_k\}_0^\infty$, кусочно-изоморфной системе Уолша—Пэли W, верно неравенство*

$$\| \sup_m | \sum_1^m a_n(f) g_n(x) | \|_p \leqslant A_p \| f \|_p \tag{3}$$

для всякого $f\in L^p$.

Доказательство.

$$\int \sup_m |\sum_1^m a_l g_l|^p \equiv \int \sup_m |S_m(f, G)|^p \leqslant 2^p \Big(\int \sup_n |S_{2^n-1}(f, G)|^p +$$

$$+ \int \sup_n \sup_{2^n<m<2^{n+1}} |\sum_{l=2^n}^m a_l g_l|^p \Big) \leqslant 2^p \Big(\int \sup_n |S_{2^n-1}(f, W)|^p +$$

$$+ \sum_{n=0}^\infty \int \sup_{2^n<m<2^{n+1}} |\sum_{l=2^n}^m a_l g_l|^p \Big) \leqslant 2^p C_p \Big(\int |f|^p + \sum_{n=0}^\infty \int |S_{2^{n+1}-1}(f, G) -$$

$$- S_{2^n-1}(f, G)|^p \Big).$$

Здесь использована кусочно-изоморфность системы G и наличие оценки типа (2) для системы W. Далее, пусть Q и R—два полинома по разным „пачкам“ системы Хаара. Тогда для $p\geqslant 2$ имеет место неравенство

$$\| Q \|_p^p + \| R \|_p^p \leqslant \| Q + R \|_p^p.$$

Это вытекает из числового неравенства

$$a^p + b^p \leqslant \frac{(a+b)^p + (a-b)^p}{2},$$

---

* Поскольку доказательство теоремы У.-С. Янга, насколько нам известно, в периодической литературе не публиковалось, то мы не знаем, проходит ли этот метод доказательства для класса кусочно-изоморфных перестановок.

верного для $a\geqslant b\geqslant 0$ при $p\geqslant 2$. Отсюда для любого N

$$\sum_{n=0}^{N-1}\int|S_{2^{n+1}-1}(f,G)-S_{2^n-1}(f,G)|^p\leqslant\int|S_{2^N-1}(f,G)|^p=\int|S_{2^N-1}(f,W)|^p\leqslant$$

$$\leqslant C_p\int|f|^p.$$

Это вместе с (4) дает (3). Теорема 4 доказана.

Заметим, что оценка типа (2) не верна для произвольной перестановки даже внутри „пачек" (ни при каком $p\geqslant 1$). Действительно, пусть ряд Фурье $\sum c_k(f)w_k(x)$ некоторой функции f из L^p расходится после некоторой перестановки τ (существование τ и f следует из того, что равномерно ограниченная нормированная система не является безусловным базисом в L^p [8]). Выберем последовательность $\{l_k\}_1^\infty$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\sum_{i=n}^{m}c_iw_i\|_p<\frac{1}{2^k}\qquad\text{для любых } m>n>l_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots$$

Далее, из расходимости ряда $\sum c_{\tau(i)}w_{\tau(i)}$ в L^p следует существование последовательности полиномов $P_k=\sum_{i=l_k}^{j_k}c_{\tau(i)}w_{\tau(i)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ таких, что при любом k $\|P_k\|_p$ больше некоторого $\varepsilon_0>0$, причем $\{P_k\}$ можно выбрать так, чтобы для всех k было

$$l_k<n_k\quad\text{и}\quad m_k<n_{k+1},$$

где

$$n_k=\min_{l_k\leqslant i\leqslant j_k}\tau(i),\qquad m_k=\max_{l_k\leqslant i\leqslant j_k}\tau(i).$$

Пусть последовательность $\{N_k\}_1^\infty$ такая, что $2^{N_k}>m_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, и $\Omega_k=\{n:n_k<n<m_k,\ n\neq\tau(i)\quad(i_k\leqslant i\leqslant j_k)\}$.

Рассмотрим ряд (r_n—функции системы Радемахера)

$$\sum_{k=1}^{\infty}r_{N_k}(P_k+\sum_{n\in\Omega_k}c_nw_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=l_k}^{j_k}c_{\tau(i)}w_{2^{N_k}+\tau(i)}+\sum_{n\in\Omega_k}c_nw_{2^{N_k}+n}\Big),$$

который расходится (в силу $\|r_{N_k}P_k\|_p=\|P_k\|_p>\varepsilon_0$) и является перестановкой внутри „пачек" ряда Фурье функции $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=n_k}^{m_k}c_nw_{2^{N_k}+n}$.

(Заметим, что $\|\sum_{n=n_k}^{m_k}c_nw_{2^{N_k}+n}\|_p=\|\sum_{n=n_k}^{m_k}c_nw_n\|_p<1/2^k$ и $\lim_{k\to\infty}\sup_{n_k<m<m_k}\|\sum_{n=n_k}^{m}c_nw_n\|_p=0$. Так что $g\in L^p$).

Из сказанного выше мы видим, что в L^p, $p>1$, ряды Фурье по системам Уолша—Пэли и Уолша—Качмажа ведут себя одинаково. Однако не так обстоит дело при $p=1$.

Предложение. *Существует $f\in L$ такая, что ее ряд*

Фурье — Уолша сходится п. в., однако в порядке Уолша—Качмажа расходится п. в.

В заключение автор благодарит Р. И. Овсепяна, под руководством которого выполнена эта работа.

Ереванский государственный университет

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵՑՅԱՆ

Ուոլշի սիստեմի տեղափոխությունների մասին

Աշխատանքում ուսումնասիրված է Ուոլշի սիստեմի խմբերի ներսում տեղափոխությունների որոշ դաս։

Այդ դասի համար ստացված են Ուոլշ-Կաչմաժի սիստեմին իզոմորֆ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ (թեորեմ 2)։ Մասնավորապես նշված է (թեորեմ 3), որ Ուոլշ—Պելիի $\{w_n\}$ և Ուոլշ—Կաչմաժի $\{\psi_n\}$ սիստեմները իզոմորֆ չեն L^p-ում ($p \neq 2$) սովորական իմաստով, այսինքն գոյություն չունի անընդհատ և սահմանափակ օպերատոր $A: L^p \to L^p$ այնպիսին, որ $A\psi_n = w_n$։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн*, Итоги науки, Сер. матем., матем. анализ, 1970, ВИНИТИ, М., 1971. [2] *Ф. Шипп*, Мат. заметки, т. 18, № 2 (1975). [3] *А. Б. Бахшецян*, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 10, № 1 (1975). [4] *Е. М. Семенов*, ДАН СССР, т. 242, № 6 (1978). [5] *Wo-Sang Young*, Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974). [6] *Wo-Sang Young*, Proc. Amer. Math. Soc., 44 (1974). [7] *P. Sjölin*, Ark. mat., 7, № 6 (1969). [8] *В. Ф. Гапошкин*, УМН, т. XIII, вып. 4 (82) (1958).