УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

О сходимости сферических средних Рисса
 кратных интегралов Фурье

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 31/V 1979)

В настоящей работе рассматривается сходимость по мере интегральных сферических средних Рисса при критическом показателе $\delta = \frac{N-1}{2}$ после изменения значения разлагаемой функции вне заданного совершенного нигде не плотного множества. Интегральными сферическими средними Рисса порядка δ называются интегралы

$$\sigma_R^\delta(x, f) = \int_{|t| < R} \left(1 - \frac{|t|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(t) e^{i(t, x)} d, t,$$

где $\hat{f}(t) = (2\pi)^{-N} \int_{E^N} f(x) e^{-i(t, x)} dx$ — преобразование Фурье функции

$f(x) \in L^1(E^N)$; E^N — N -мерное евклидово пространство $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in E^N, |x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$; $(t, x) = t_1 \cdot x_1 + \dots + t_N \cdot x_N$ — скалярное произведение t и x .

Стейном (см. (1), стр. 192) было доказано, что для любой функции $f(x) \in L^1(E^N)$ интегральные сферические средние порядка $\delta > \frac{N-1}{2}$ сходятся к ней почти всюду и в метрике $L^1(E^N)$.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L^1(E^N)$ и $Q \subset E^N$ — любое совершенное нигде не плотное множество. Тогда можно определить функцию $F(x) \in L^1(E^N)$ такую, что $F(x) = f(x)$ на Q и ее интегральные сферические средние Рисса порядка $\delta = \frac{N-1}{2}$ сходятся к ней по мере.

Основным средством для доказательства теоремы 1 является следующая

Лемма 1. Пусть даны квадрат $\Delta \subset E^N$, совершенное нигде не плотное множество $Q \subset \Delta$, действительные числа $R_0 > 1$, $\gamma \neq 0$ и $\varepsilon > 0$.

Тогда существуют ограниченная функция $\varphi(x)$ и измеримое множество E , $\text{mes } E < [4\pi(\varepsilon + |\Delta|^{1/N})]^N$ такие, что

$$\text{а) } \varphi(x) = \begin{cases} \gamma & \text{при } x \in Q \\ 0 & \text{при } x \in \bar{\Delta} \end{cases};$$

$$\text{б) } \int_{E^N} |\varphi(x)| dx \leq 2 |\gamma| \cdot |\Delta|;$$

$$\text{в) } |\hat{\varphi}(y)| = \left| \int_{E^N} \varphi(x) e^{-i(x,y)} dx \right| < \varepsilon \text{ при } |y| \leq R_0;$$

$$\text{г) } |\tau_R^{\frac{N-1}{2}}(x, \varphi)| < B \varepsilon^{-N} |\gamma| |\Delta| \text{ при } x \in E, \text{ для всех } R,$$

где B — абсолютная постоянная.

Лемму 1 можно доказать путем применения некоторых элементов конструкции Менъшова, предложенной им в работе (2).

Этот же метод можно применить для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная в $L^2[0,1]$, ортонормированная система ограниченных функций и $\varepsilon > 0$ любое положительное число. Тогда существуют измеримое множество E , $\text{mes } E < \varepsilon$ и возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ со следующими свойствами: для любой функции $f(x) \in L^1[0,1]$ можно найти такую функцию $F(x) \in L^1[0,1]$, что

$$F(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in E^c = [0,1] \setminus E$$

и подпоследовательность $S_{N_k}(F, x)$ частичных сумм $S_n(F, x)$ ряда Фурье функции $F(x)$ сходится к ней почти всюду и в метрике $L^1[0,1]$.

В связи с этим отметим, что Марцинкевич (см. (2), стр. 358—362) доказал, что существуют $f_0(x) \in L[0, \pi]$ и полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченных функций такие, что любая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f_0(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится почти всюду на $[0, \pi]$.

Теорема 2 показывает, что любую функцию $f(x) \in L^1$ можно изменить на множествах, зависящих только от системы $\{\varphi_n(x)\}$ и имеющих сколь угодно малую меру, таким образом чтобы некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье вновь полученной функции сходилась бы к ней почти всюду.

Доказательство теоремы 2 основано на следующей лемме.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полная в $L^2[0,1]$ ортонормированная система ограниченных функций и $\varepsilon > 0$.

Тогда существует измеримое множество E , $\text{mes } E < \varepsilon$ со следующими свойствами: для любых $f(x) \in L^2[0,1]$, $N > 1$ и $\delta > 0$, существует $g(x) \in L^2[0,1]$ такая, что

$$1) \quad g(x) = f(x) \quad \text{при } x \in E^c;$$

$$2) \quad \int_0^1 |g(x)| dx < 2 \int_0^1 |f(x)| dx;$$

$$3) \quad \left| \int_0^1 g(x) \varphi_k(x) dx \right| < \delta, \quad 1 \leq k \leq N.$$

В работе автора (4) было установлено, что если ПОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из непрерывных функций, то в формулировке теоремы 2 в качестве множества E^c можно взять любое нигде не плотное замкнутое множество.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну за постановку задач и внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Մ. Ժ. ՉԻՒՆՈՐՅԱՆ

Ֆուրյեի բազմապատիկ ինտեգրալների սֆերիկ միջինների զուգամիտությունը մասին:

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1. Նրե $Q \subset E^N$ ամենուրեք նուր կատարյալ բազմություն k , ապա ցանկացած $f(x) \in L^1(E^N)$ կարելի է փոխել Q -ից դուրս այնպես, որ նոր ստացված ֆունկցիայի կրիտիկական ցուցիչով Ռիսի ինտեգրալ սֆերիկ միջինները ըստ չափի զուգամիտեն իրեն:

Թեորեմ 2. Նրե $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ -ը $L^2[0,1]$ -ում լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ է, ապա գոյություն ունեն չափելի բազմություն E և բնական թվերի ենթահաջորդականություն $N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots$ այնպիսիք, որ ցանկացած $f(t) \in L^1[0,1]$ -ի համար կարելի է գտնել $F(t) \in L^1[0,1]$ $F(t) = f(t), t \in E$, այնպես, որ $F(t)$ -ի Ֆուրյեի շարքի (ըստ $\{\varphi_n(t)\}$ -սիստեմի) մասնակի գումարների $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ -համարներով ենթահաջորդականությունը համարյա ամենուրեք և $L^1[0,1]$ մետրիկայով զուգամիտի իրեն:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, «Мир», М., 1974. ² Д. Е. Меньшов. О рядах Фурье от суммируемых функций, ТММО, 1, 1952. ³ С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958. ⁴ М. Ж. Григорян. О сходимости двойных рядов в метрике $L^p[0,1] \times [0,1]$, $0 < p < 1$, ДАН Арм. ССР, т. 68, № 4 (1979).