ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Г. Инджеян

Об ахроматическом числе гиперграфов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 30/IV 1979)

В настоящей работе рассматривается полная раскраска гиперграфов и приводятся некоторые достижимые оценки для ахроматического числа. Обобщаются ранее известные результаты Д. Геллера и К. Гудсона для ахроматического числа графов ([1]).

Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в ([2]).

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ — произвольное множество, а E — произвольное семейство подмножеств из X, причем для любого $e \in E$ имеет место $|e| \geqslant 2$. Пара $H=(X, E)$ называется гиперграфом с множеством вершин X и множеством ребер E.

Раскраску вершин гиперграфа будем считать правильной, если все вершины одного и того же ребра разноцветны. Правильная n-раскраска гиперграфа цветами $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется полной, если любая пара цветов $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ смежна, т. е. существуют смежные вершины x и y, окрашенные в i и j.

Гиперграф $H=(X, E)$ называется гиперграфом полных смежностей, если в нем любые две вершины смежны, т. е. принадлежат какому-то общему ребру.

Отождествление любых двух несмежных вершин в гиперграфе назовем элементарным гомоморфизмом. Гомоморфизм гиперграфа H — это последовательность его элементарных гомоморфизмов.

Хроматическое число $\gamma(H)$ (ахроматическое число $\psi(H)$) — это наименьшее (наибольшее) число красок, требующихся для полной раскраски вершин гиперграфа H.

Пусть $E(x)=\{e \in E / x \in e\}$,

$$L(x)=\{y \in X / \exists e \in E(x)(y \in e)\}$$

и

$$H-x=(X \setminus \{x\}, E \setminus E(x)),$$

$$H-e=(X, E \setminus \{e\}).$$

Теорема 1. *Для любого гиперграфа* $H=(X, E)$ *и любого ребра* $e \in E$

$$\psi(H)-|e|+1 \leqslant \psi(H-e) \leqslant \psi(H)+\left[\frac{|e|}{2}\right].$$

Доказательство. Пусть $e=(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ и $\psi(H)=n$. Предположим сначала, что не выполнено правое неравенство, т. е. $\psi(H-e)=n+k>n+\left[\frac{|e|}{2}\right]$. Очевидно при любой полной $n+k$-раскраске гиперграфа $H-e$ должны существовать вершины из $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, которые окрашены в один и тот же цвет. Зафиксируем одну из таких раскрасок, и пусть $X_j(e) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, $|X_j(e)| \geqslant 2$, $j=\overline{1, m}$, причем вершины множества $X_j(e)$ окрашены цветом j. Очевидно, $m \leqslant \left[\frac{|e|}{2}\right]$. Докажем существование такой перекраски вершин гиперграфа H, при которой уничтожаются все одноцветные классы, а число красок уменьшается не более чем на m. Рассмотрим множество $X_1(e)$.

Случай 1. Существует вершина $x \in X_1(e)$, смежная с вершинами всех цветов, кроме, быть может, тех, которыми раскрашены вершины из $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$.

Тогда, оставив цвет вершины x без изменения, перекрасим все вершины $X_1(e) \setminus \{x\}$ в различные цвета, отличные от цветов вершин $x_1, x_2, \ldots, x_l$, используя в случае необходимости новые цвета.

Случай 2. Для любой вершины $x \in X_1(e)$ существует цвет q такой, что ни одна вершина из $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\} \cup L(x)$ не окрашена в q.

Выберем произвольную вершину $x \in X_1(e)$ и, оставив ее цвет без изменения, перекрасим все вершины $X_1(e) \setminus \{x\}$ в различные цвета, отличные от цветов вершин $x_1, x_2, \ldots, x_l$, используя в случае необходимости новые цвета. Но тогда, возможно, нарушится смежность цвета 1 с какими-то цветами L_p. Если все эти цвета присвоены также некоторым вершинам из $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, то переходим к рассмотрению множества $X_2(e)$.

Пусть теперь существует такой цвет $l_c \in L_p$, в который не окрашена ни одна вершина из $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$. Тогда перекрасим все вершины цвета 1 в цвет l_c (очевидно, полученная раскраска будет правильной). Таким образом, уменьшив количество цветов не более чем на 1, мы уничтожили одноцветный класс $X_1(e)$. Проделывая то же самое со всеми остальными множествами $X_j(e)$, где $j=2, 3, \ldots, m$, мы придем к полной раскраске вершин гиперграфа H, откуда $\psi(H) \geqslant \psi(H-e)-m$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства $\psi(H-e) \leqslant \psi(H)+\left[\frac{|e|}{2}\right]$.

Теперь докажем, что $\psi(H-e)\geqslant\psi(H)-|e|+1$. Пусть $\psi(H)=n$. Тогда, очевидно, существует гомоморфизм гиперграфа H на n-вершинный гиперграф полных смежностей K_n. Следовательно, для любого ребра e из H найдется ребро e' из K_n такое, что $|e'|=|e|$, и существует гомоморфизм $H-e$ на K_n-e'. Поэтому $\psi(H-e)\geqslant\psi(H)-|e|+1$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого гиперграфа $H=(X, E)$ и любой вершины $x\in X$*

$$\psi(H)-|L(x)|\leqslant\psi(H-x)\leqslant\psi(H)+\left[\frac{|L(x)|}{2}\right].$$

Доказательство. Пусть $\psi(H)=n$. Рассмотрим раскраску гиперграфа $H-x$, порожденную полной n-раскраской гиперграфа H, где x окрашена цветом j_1. Если эта раскраска не полная, то существуют цвета j_k и j_m, присвоенные вершинам из $L(x)\cup\{x\}$, такие, что ни одна вершина цвета j_k не смежна ни с одной вершиной цвета j_m. Перекрасим в цвет j_m все вершины цвета j_k. Если эта раскраска не полная, то опять должны существовать цвета j_p и j_q, присвоенные вершинам из $L(x)\cup\{x\}$, такие, что никакая вершина цвета j_p не смежна ни с какой вершиной цвета j_q. Тогда перекрасим в j_q все вершины цвета j_p и т. д.

Легко заметить, что путем таких перекрашиваний в конце концов получим полную раскраску вершин гиперграфа $H-x$ не менее чем $\psi(H)-|L(x)|$ цветами. А это значит, что $\psi(H-x)\geqslant\psi(H)-|L(x)|$.

Докажем справедливость неравенства $\psi(H-x)\leqslant\psi(H)+\left[\frac{|L(x)|}{2}\right]$. Пусть $\psi(H-x)=n$. Если полная n-раскраска гиперграфа $H-x$ такова, что она является правильной раскраской вершин $X\setminus\{x\}$ в H, то, окрасив x одним из цветов $1, 2, \ldots, n$ или, если это невозможно, цветом $n+1$, получим полную раскраску вершин H. Пусть теперь полная n-раскраска гиперграфа $H-x$ не является правильной раскраской вершин $X\setminus\{x\}$ в H, т. е. существует ребро $e=(x_1,x_2,\ldots,x_t)\in E(x)$ такое, что не все вершины из $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\setminus\{x\}$ окрашены различно. Пусть $X_j(e)\subseteq\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}\setminus\{x\}$, $|X_j(e)|\geqslant2$ и все вершины в $X_j(e)$ окрашены цветом j. Для каждого ребра e, перекрасив вершины из $e\setminus\{x\}$ так, как это было сделано в доказательстве теоремы 1, мы получим полную раскраску вершин множества $X\setminus\{x\}$ в H. После этого окрасим вершину x в один из использованных цветов, а если это невозможно, придадим ей новый, еще не использованный цвет. Очевидно, число красок будет не менее $\psi(H-x)-\left[\frac{|L(x)|}{2}\right]$, а это значит, что $\psi(H)\geqslant\psi(H-x)-\left[\frac{|L(x)|}{2}\right]$, откуда $\psi(H-x)\leqslant\psi(H)+\left[\frac{|L(x)|}{2}\right]$. Теорема доказана.

Легко можно убедиться, что нижние оценки для $\psi(H-e)$ и $\psi(H-x)$, приведенные в теоремах 1 и 2, достижимы. Верхние оценки тоже достижимы; более того, для любого k существуют гиперграфы H и G, в которых можно найти ребро $e\in H$ и вершину $x\in G$ такие, что $\psi(H-e)=\psi(H)+k$ и $\psi(G-x)=\psi(G)+k$. Нетрудно убедиться, что для гиперграфа $H=(X, E)$, где

$$X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{4k}\},$$

$$E=\{(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})\}\cup\{(x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_{4k})\}\cup E_1\cup E_2,$$

$$E_1=\{(x_i, x_j)/i, j\in[1, 2k]\}\setminus(\bigcup_{i=1}^{k}(x_{2i-1}, x_{2i})),$$

$$E_2=(\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=2k+1}^{3k}(x_{2i-1}, x_j))\cup(\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=3k+1}^{4k}(x_{2i}, x_j)),$$

и для ребра $e=(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$ имеет место $\psi(H-e)=\psi(H)+k$.

Для гиперграфа $G=(Y, W)$, где

$$Y=\{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{4k+6}\},$$

$$W=\{(y_{2k+5}, y_{2k+6}, \ldots, y_{4k+6})\}\cup\{(y_1, y_3, y_4, \ldots, y_{2k+2})\}\cup\{(y_1, y_2)\}\cup$$
$$\cup\{(y_2, y_{2k+3}, y_{2k+4})\}\cup W_1\cup W_2,$$

$$W_1=\{(y_i, y_j)/i, j\in[3, 2k+4]\}\setminus(\bigcup_{i=1}^{k+1}(y_{2i+1}, y_{2i+2})),$$

$$W_2=(\bigcup_{i=1}^{k+1}\bigcup_{j=2k+5}^{3k+5}(y_{2i+1}, y_j))\cup(\bigcup_{i=1}^{k+1}\bigcup_{j=3k+6}^{4k+6}(y_{2i+2}, y_j))$$

и для вершины $y_1\in Y$ имеет место $\psi(G-y_1)=\psi(G)+k$.

Пусть $H=(X, E)$ — произвольный t-хроматичный гиперграф, а X_i — независимые множества, где $\bigcup_{i=1}^{t} X_i=X$. Через $\bar{H}$ обозначим класс гиперграфов $\bar{H}=(\bar{X}, \bar{E})$, в которых независимыми множествами являются те же самые X_i и вершины из разных независимых множеств смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в H. Нетрудно убедиться, что для любых двух гиперграфов $\bar{H}_1, \bar{H}_2\in\bar{H}$ имеем $k(\bar{H}_1)=k(\bar{H}_2)$, где $k(H)$ — число нетривиальных компонент гиперграфа H. Через $\tau_i(1\leqslant i\leqslant t)$ обозначим переменную, принимающую значение 1, если существует по крайней мере одна вершина из X_i, инцидентная всем вершинам из $X\setminus X_i$, и 0 в противном случае.

Теорема 3. *Если $H=(X, E)-t$ —хроматичный гиперграф, то*

$$|X|-\max_{1\leqslant i\leqslant t}|X_i|+1\geqslant\psi(H)\geqslant\sum_{i=1}^{t}\tau_i+k(\bar{H}),$$

где $\bar{H}\in\bar{H}$

Доказательство. Очевидно, что в полной ψ-раскраске гиперграфа H число цветов, принадлежащих только X_i, не может превосходить 1. А это значит, что $\psi(H) \leqslant |X| - \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant t} |X_i| + 1$.

Докажем справедливость нижней оценки.

Пусть $k(\bar{H}) = k$ и $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \ldots, \bar{H}_k$ — нетривиальные компоненты гиперграфа $\bar{H}$. Пусть $B_i \in \bar{H}_i$ — максимальная по числу вершин t-дольная часть, в которой любые две вершины из разных долей смежны; окрасим все вершины этой части цветом i.

Если $\tau_i = 1$, то существует вершина $x \in X_i$, смежная со всеми вершинами из $X \setminus X_i$; окрасим ее цветом $k + i$ $(i \in [1, t])$. Очевидно, что в гиперграфе H все эти цвета попарно смежны и смежные вершины окрашены различно. Каждой еще не окрашенной вершине придадим один из использованных цветов, а если это невозможно, то окрасим эту вершину новым цветом. В конечном итоге получим полную раскраску вершин гиперграфа H не менее чем $\sum\limits_{i=1}^{t} \tau_i + k(\bar{H})$ цветами, т. е. $\psi(H) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{t} \tau_i + k(\bar{H})$. Теорема доказана.

Пусть теперь $H = (X, E)$ — произвольный p-вершинный гиперграф, а $\bar{\boldsymbol{H}}$ — класс гиперграфов $\bar{H} = (X, \bar{E})$, в которых две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в H; $\tau(H)$ — число вершин, смежных с $p-1$ вершинами.

Теорема 4. *Для любого p-вершинного гиперграфа H*

$$k(\bar{H}) + \tau(H) \leqslant \psi(H) \leqslant p, \qquad \text{где } \bar{H} \in \bar{\boldsymbol{H}}.$$

Доказательство. Верхняя оценка очевидна. Докажем справедливость нижней оценки.

Пусть $k(\bar{H}) = k$ и пусть $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \ldots, \bar{H}_k$ — нетривиальные компоненты $\bar{H}$. В каждой $\bar{H}_i$ выберем максимальную по числу вершин часть полных смежностей B_i и раскрасим все вершины B_i цветом i, а изолированным вершинам H придадим цвета $k+1, k+2, \ldots, k + \tau(H)$. Очевидно, все использованные цвета в гиперграфе H попарно смежны и не существует смежных вершин, окрашенных в один и тот же цвет. Каждой еще не окрашенной вершине придадим один из использованных цветов, а если это невозможно, то новый цвет. Таким образом мы получим полную раскраску для H не менее чем $k(\bar{H}) + \tau(H)$ цветами, т. е. $\psi(H) \geqslant k(\bar{H}) + \tau(H)$. Теорема доказана.

Теорема 1 является обобщением результата Д. Геллера и К. Гудсона:

$$\psi(H) - 1 \leqslant \psi(H - e) \leqslant \psi(H) + 1,$$

где H — произвольный граф, а e — произвольное его ребро. Нетрудно убедиться, что при $|e|=2$ неравенства теоремы 1 совпадают с неравенствами (*).

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Ս. Դ. ԻՆՃԵՅԱՆ

Հիպերգրաֆների ախրոմատիկ թվի մասին

H հիպերգրաֆի գագաթների ուժեղ ներկումը կանվանենք լրիվ, եթե գույների կամայական i և j զույգի համար գոյություն ունեն x և y կից գագաթներ, որոնք ներկված են համապատասխանաբար i և j գույներով։ $\psi(H)$-ով կնշանակենք գույների մաքսիմալ թիվը, որն անհրաժեշտ է H-ը լրիվ ներկելու համար։

$H=(X, E)$ հիպերգրաֆի կամայական $e \in E$ կողի և կամայական $x \in X$ գագաթի համար ստացված են հետևյալ հասանելի գնահատականները՝

$$\psi(H)-|e|+1<\psi(H-e) \leqslant \psi(H)+\left\lfloor \frac{|e|}{2} \right\rfloor$$

$$\psi(H)-|L(x)| \leqslant \psi(H-x) \leqslant \psi(H)+\left\lfloor \frac{L(x)}{2} \right\rfloor$$

որտեղ՝

$$L(x)=\{y \in X / \exists e \in E(x,\ y \in e)\}$$

Ստացված են նաև հասանելի գնահատականներ $\psi(H)$-ի համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. Geller, K. Hudson,* Fundamenta Mathematicae, LXXXV, 1974. [2] *C. Berge,* Graphes et hypergraphes, Paris, Dunod, 1970