ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. С. Степанян

Об интегральном представлении функций класса М. М. Джрбашяна $H_p(\alpha)$

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 22/III 1979)

Г. М. Голузин и В. И. Крылов ([1]) дали представление функции $f(z)$ класса H_1 Рисса по ее угловым граничным значениям, заданным на множестве точек единичной окружности, имеющем положительную меру.

Это представление имеет следующий вид:

$$f(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int_E\frac{e^{\sigma\psi(t)}f(t)}{t-z}\,dt,\ |z|<1, \tag{1}$$

где $\psi(z)=u(z)+iv(z)$ — аналитическая функция в круге $|z|<1$,

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_E(e^{i\theta})P_r(\theta-\varphi)\,d\theta,$$

E — множество положительной меры по Лебегу, принадлежащее единичной окружности: $mE>0$, $E\subset\Gamma=\{t;\ |t|=1\}$, $\lambda_E(e^{i\theta})$ представляет характеристическую функцию этого множества, $P_r(\theta-\varphi)$ — ядро Пуассона,

$$\lambda_E(t)=\begin{cases}1, & \text{если } t\in E\\ 0, & \text{если } t\in\Gamma\setminus E,\end{cases}$$

$$P_r(\theta-\varphi)=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}.$$

$$0\le r<1,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

σ — положительное число.

Вопросу представимости аналитических в единичном круге функций посвящены многочисленные исследования. Среди них важное место занимает известная работа М. М. Джрбашяна ([2]).

Им же еще в 1945 г. был определен класс $H_p(\alpha)$ голоморфных в единичном круге функций, который содержит в себе классы H_p Рисса ($p>0$). Этот класс определяется следующим образом (см. ([3]), а также ([2])).

Отнесем к классу $H_p(\alpha)$ ($p>0$, $\alpha>-1$) все функции $f(z)$, голоморфные в единичном круге $|z|<1$, для которых интеграл

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha|f(\rho e^{i\theta})|^p\rho d\rho d\theta$$

существует.

Нетрудно убедиться, что класс Рисса $H_p\subset H_p(\alpha)$ при любом $\alpha>-1$.

Для классов $H_p(\alpha)$ были установлены следующие теоремы о представлениях:

1. *Если $f(z)\in H_p(\alpha)$ ($p\geqslant 1$, $\alpha>-1$), то*

$$f(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\alpha\frac{f(\rho e^{i\theta})}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\rho d\rho d\theta,\ |z|<1$$

(см. ([2]), теорему 1).

2. *Если $f(z)\in H_2(\alpha)$ ($\alpha>-1$), то*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\varphi_0(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\alpha+3}{2}}}\cdot|dt|,\ |z|<1, \tag{2}$$

где функция

$$\varphi_0(z)=\frac{\alpha+1}{2}\int_0^1(1-\rho)^{\frac{\alpha-1}{2}}f(\rho z)d\rho,\ |z|<1,$$

принадлежит классу H_2 Рисса (см. ([2]), теорему 5).

В настоящей статье рассматривается следующий вопрос: построить аналогичное представление типа (1) для класса М. М. Джрбашяна $H_2(\alpha)$ ($\alpha>-1$).

Теорема 1. *Для любой функции $f(z)$ класса $H_2(\alpha)$ ($\alpha>-1$) и произвольного множества $E(mE>0)$ единичной окружности существует функция $\varphi(z)$ из класса H_2 Рисса в круге $|z|<1$, такая, что*

$$f(z) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)P_{\sigma}(t,\ z)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+3}{2}\right]+1}} \cdot \frac{dt}{t},\ |z|<1, \tag{3}$$

где $P_{\sigma}(t,\ z)$ — *многочлен степени* $q = \left[\frac{\alpha+3}{2}\right]$ *относительно* z *и определяется из равенства*

$$\frac{1}{q!}\frac{d^q}{dz^q}\left\{\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{t-z}\right\} = \frac{P_{\sigma}(t,\ z)}{(t-z)^{q+1}}\, e^{-\sigma\psi(z)}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $f(z) \in H_2(\alpha)$ $(\alpha > -1)$. Выбирая $\beta = 2 \cdot \left[\frac{\alpha+3}{2}\right] - 1$, имеем, что $\alpha < \beta$. Поскольку $H_2(\alpha) \subset H_2(\beta)$, то имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{\beta+3}{2}}}|dt|, \tag{5}$$

где

$$\varphi(z) = \left[\frac{\alpha+3}{2}\right]\int\limits_0^1 (1-\rho)^{\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]} f(\rho z)d\rho,\ |z|<1$$

принадлежит классу H_2 Рисса. По теореме Г. М. Фихтенгольца ([4], стр. 97) $\varphi(z)$ можно представить интегралом Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{t-z}dt. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что

$$f(z) = \frac{1}{q!}\frac{d^q}{dz^q}\left\{\varphi(z)z^q\right\}, \tag{7}$$

где $q = \left[\frac{\alpha+3}{2}\right]$.

Из теории граничных значений интеграла Пуассона — Стильтьеса известно, что

$$\lim_{r \to 1} u(re^{i\varphi}) = \lim_{r \to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \lambda_{\varepsilon}(e^{i\theta})P_r(\theta-\varphi)d\theta = \lambda_{\varepsilon}(e^{i\varphi})$$

почти всюду на единичной окружности.

Функцию, гармонически сопряженную с $u(z)$, обозначим через $v(z)$. Тогда $\psi(z)=u(z)+iv(z)$ будет аналитической функцией в единичном круге. Построим новую функцию $e^{\sigma\psi(z)}$, где σ — положительное число; эта функция ограничена по модулю при любом σ

$$|e^{\sigma\psi(t)}|=\begin{cases} e^{\sigma}, & \text{если } t\in E \\ 1, & \text{если } t\in\Gamma\setminus E. \end{cases}$$

Следовательно, $z^q\varphi(z)e^{\sigma\psi(z)}\in H_1$ Рисса.

По теореме Г. М. Фихтенгольца функция $z^q\varphi(z)e^{\sigma\psi(z)}$ представима интегралом Коши

$$z^q\varphi(z)e^{\sigma\psi(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)t^q}{t-z}\,dt,\ |z|<1.$$

Отсюда получим, что

$$z^q\varphi(z)=\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)t^q}{t-z}\,dt,\ |z|<1. \tag{8}$$

Учитывая (7) и (8), можем написать

$$f(z)=\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)t^qP_s(t,z)}{(t-z)^{q+1}}\,dt,\ |z|<1, \tag{9}$$

где $P_s(t,z)$ — многочлен степени q относительно z и определяется из равенства (4).

Из (9) имеем, что

$$f(z)=\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_E\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)P_s(t,\ z)}{(1-\bar{t}z)^{q+1}}\cdot\frac{dt}{t}+\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\setminus E}\frac{e^{\sigma\psi(t)}\varphi(t)P_s(t,z)}{(1-\bar{t}z)^{q+1}}\frac{dt}{t}. \tag{10}$$

Так как $\operatorname{Re}\psi(z)>0$, $|z|<1$, $|e^{\sigma\psi(t)}|=1$, $t\in\Gamma\setminus E$, то предел последнего интеграла (10) при $\sigma\to\infty$ равен нулю. Переходя к пределу в равенстве (10) при $\sigma\to\infty$, окончательно получим (3). Теорема доказана.

Функцию $f(z)$ можно представить и без знака предела. С этой целью воспользуемся следующей формулой Карлемана ([1]):

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E\frac{F(t)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty}d\sigma\int\limits_E\frac{F(t)}{t-z}\left|\frac{\gamma(t)}{\gamma(z)}\right|^{\sigma}\ln\frac{\gamma(t)}{\gamma(z)}\,dt,$$

где $F(z)\in H_1$ Рисса, $mE>0$, $|\gamma(t)|=1$, $t\in\Gamma\setminus E$, $|\gamma(z)|>1$, $|z|<1$. Мы можем взять $\gamma(z)=e^{\psi(z)}$, а вместо $F(z)$ взять $\frac{1}{q!}\varphi(z)z^q$. Тогда будем иметь

$$\frac{\varphi(z)z^q}{q!}=\frac{1}{2\pi i q!}\int\limits_F \frac{\varphi(t)t^q}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i q!}\int\limits_0^\infty d\sigma\int\limits_E \frac{\varphi(t)t^q}{t-z}\left[\frac{e^{\psi(t)}}{e^{\psi(z)}}\right]^\sigma|\psi(t)-\psi(z)|\,dt.$$

Имея в виду (7) для функций $f(z)$ класса $H_2(\alpha)$ $(\alpha>-1)$, получаем интегральное представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E \frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+3}{2}\right]+1}}\frac{dt}{t}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty d\sigma\int\limits_E \frac{\varphi(t)P_\sigma(t,z)e^{\sigma\psi(t)-\sigma\psi(z)}}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+3}{2}\right]+1}}\cdot\frac{dt}{t},$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства

$$\frac{1}{q!}\frac{d^q}{dz^q}\left\{\frac{\psi(t)-\psi(z)}{t-z}e^{-\sigma\psi(z)}\right\}=\frac{P_\sigma(t,z)}{(t-z)^{q+1}}e^{-\sigma\psi(z)}. \tag{11}$$

Дифференцирование под знаком интеграла здесь допустимо в силу известной теоремы анализа (([5]), стр. 218).

Теперь перейдем к установлению интегрального представления функций класса $H_p(\alpha)$, $\alpha>-1$ для произвольного p, $0<p<\infty$.

Теорема 2. *Для любой функции $f(z)$ класса $H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty$, $\alpha>-1)$ и произвольного множества $E(mE>0)$ единичной окружности существует функция $\Phi(z)\in H_2$ Рисса, $|z|<1$ такая, что имеет место представление*

$$f(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int\limits_E \frac{e^{\sigma\psi(t)}\Phi(t)P_\sigma(t,z)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\frac{dt}{t},\quad |z|<1,$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства (4) *при* $q=\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1$.

Доказательство. Известна следующая оценка:

$$M_f(\rho)\leqslant\frac{C_f}{(1-\rho)^{\frac{\alpha+2}{p}}}, \tag{12}$$

где $M_f(\rho)=\max\limits_{0\leqslant\theta<2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|$, C_f — постоянное число для произвольной $f(z)\in H_p(\alpha)$. Учитывая (12), легко убедиться, что класс $H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty$, $\alpha>-1)$ содержится в классе $H_2(\beta)$, где $\beta>\frac{2(\alpha+2)}{p}-1$.

Действительно, из (12) имеем

$$\frac{\alpha+2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^\beta|f(\rho e^{i\theta})|^2\rho d\rho d\theta < M\int_0^1(1-\rho)^{\beta-\frac{2(\alpha+2)}{p}}\cdot d\rho,$$

где M — постоянное число, а интеграл в правой части сходится вследствие условия $\beta > \frac{2(\alpha+2)}{p} - 1$.

Принимая $\beta = 2\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1$, имеем, что

$$2\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1 > \frac{2(\alpha+2)}{p} - 1.$$

Следовательно, если $f(z) \in H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty,\ \alpha>-1)$, то

$$f(z) \in H_2(\beta), \text{ где } \beta = 2\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1.$$

Используя представление (2), имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1}\frac{\Phi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\cdot|dt|,$$

откуда вышеизложенным способом доказывается, что

$$f(z) = \lim_{\sigma\to\infty}\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int_E\frac{e^{\sigma\psi(t)}\Phi(t)P_\sigma(t, z)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\cdot\frac{dt}{t}.$$

Теорема доказана.

С помощью формулы Карлемана функцию $f(z)$ можно представить и без знака предела следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E\frac{\Phi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\cdot\frac{dt}{t} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}d\sigma\int_E\frac{\Phi(t)P_\sigma(t, z)e^{\sigma\psi(t)-\sigma\psi(z)}}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+2}}\cdot\frac{dt}{t},$$

где $P_\sigma(t, z)$ определяется из равенства (11) при $q = \left[\frac{\alpha+2}{p}\right]+1$.

Теперь получим представление типа (1) для функций класса H_p $(0<p<1)$ Рисса.

Теорема 3. *Для любой функции $f(z)$ класса H_p Рисса $(0<p<1)$ и произвольного множества E $(mE>)$ единичной окружности существует функция $\mu(z)\in H_2$ Рисса, $|z|<1$ такая, что имеет место представление*

$$f(z)=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{e^{-\sigma\psi(z)}}{2\pi i}\int_E\frac{e^{\sigma\psi(t)}\mu(t)P_\sigma(t,z)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{1}{p}\right]+1}}\cdot\frac{dt}{t}, \tag{13}$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства (4) при $q=\left[\frac{1}{p}\right]$.

Действительно, известна следующая теорема ((6), теорема 5.11) Г. Г. Харди — Дж. Е. Литтлвуда.

Если $0<p<q\leqslant\infty$, $f(z)\in H_p$, $\lambda\geqslant p$ и $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, то

$$\int_0^1(1-r)^{\alpha\lambda-1}\left\{M_q(r,f)\right\}^\lambda dr<\infty,$$

где

$$M_q(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Принимая $0<p<1$, $\lambda=2$, $q=2$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^{2\alpha-1}|f(re^{i\theta})|^2 dr d\theta<\infty.$$

Это означает, что $f(z)\in H_2(2\alpha-1)$, $2\alpha-1=\frac{2}{p}-2$.

Выбирая $\beta=2\left[\frac{1}{p}\right]-1>\frac{2}{p}-2$, получаем представление (13).

Пользуясь формулой Карлемана, получаем представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_E\frac{\mu(t)}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{1}{p}\right]+1}}\cdot\frac{dt}{t}+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\sigma\int_E\frac{\mu(t)P_\sigma(t,z)e^{\sigma\psi(t)-\sigma\psi(z)}}{(1-\bar{t}z)^{\left[\frac{1}{p}\right]+1}}\cdot\frac{dt}{t},$$

где $P_\sigma(t,z)$ определяется из равенства (11) при $q=\left[\frac{1}{p}\right]$.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Ս. Ս. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Մ. Մ. Ջրբաշյանի $H_p(\alpha)$ դասի ֆունկցիաների ինտեգրալային ներկայացումների մասին

Գ. Մ. Գոլուզինը և Վ. Ի. Կռիլովը Ռիսի H_1 դասի ֆունկցիաների համար տվել են ներկայացում միավոր շրջանագծի դրական չափի բազմության վրա տրված ֆունկցիայի անկյունային եզրային արժեքների միջոցով։

Ներկա հոդվածում ստացված են նման տիպի ներկայացումներ Մ. Մ. Ջրբաշյանի $H_2(\alpha)$, $H_p(\alpha)$ $(0<p<\infty,\ \alpha>-1)$ և Ռիսի $H_p (0<p<1)$ դասերի ֆունկցիաների համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. М. Голузин, В. И. Крылов*, Мат. сб., 40 (2), 1933. [2] *М. М. Джрбашян*, Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948. [3] *М. М. Джрбашян*, ДАН Арм. ССР, т. 3, № 1 (1945). [4] *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950. [5] *Г. М. Фихтенгольц*, О простых кратных интегралах, зависящих от параметра, 1918. [6] *L. Duren*, Theory of H_p spaces, New York and London, 1970.