ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Д. Т. Багдасарян

Классы гармонических и голоморфных функций в многосвязной области и их параметрические представления

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 23/XI 1978)

а) Следуя работе М. М. Джрбашяна [1], будем считать, что неотрицательная и непрерывная на $[0, 1)$ функция $\omega(x)\in\Omega$, если

$$1)\ \omega(0)=1 \quad \int_0^1 \omega(x)dx<+\infty$$

$$2)\ \int_r^1 \omega(x)dx>0 \quad 0\leqslant r<1 \tag{1}$$

Далее условимся относить к классу P_ω любую функцию $p(r)$, представимую в виде

$$p(0)=1 \quad p(r)=r\int_r^1 \frac{\omega(x)}{x^2}dx \quad r\in(0, 1] \tag{2}$$

с некоторой функцией $\omega(x)\in\Omega$.

Если $\omega(x)\in\Omega$, то положим

$$C(z, \omega)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}, \quad S(z, \omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k} \quad (|z|<1) \tag{3}$$

где

$$\Delta_0=1 \quad \Delta_k=k\int_0^1 x^{k-1}\omega(x)dx. \tag{4}$$

В работе [1] введен оператор

$$L^{(\omega)}\left\{\varphi(x)\right\}=-\frac{d}{dx}\left\{x\int_0^1\varphi(x\tau)dp(\tau)\right\} \quad x\in[0, 1) \tag{5}$$

в предположении, что в надлежащих классах допустимых функций определенных на $(0, 1)$, правая часть тождества (5) существует хотя бы почти всюду на $(0, 1)$.

В настоящей работе получен аналог теоремы (3) М. М. Джрбашяна ((1), стр. 1091) для функций голоморфных в многосвязной области $G((z_0R_0), (\alpha_1R_1) \cdot \cdot \cdot (\alpha_m, R_m))$. Определен класс функций $U_{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m}(G)$ гармонических в области $G((z_0, R_0), \ldots, (\alpha_m, R_m))$ и класс функций $R_{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m}(G)$ голоморфных в области G и получен аналог теорем (5) ((1), стр. 1095) и (7) ((1), стр. 1100) М. М. Джрбашяна для этих классов.

б) Пусть $G((z_0, R_0), (\alpha_1R_1), \cdot \cdot \cdot, (\alpha_m, R_m))$ $(m+1)$ связная область, граница которой состоит из $(m+1)$ окружностей

$$\Gamma(z_0R_0): \left\{z/|z - z_0| = R_0\right\}, \underset{k=1,\ldots,m}{\Gamma}(\alpha_k, R_k): \left\{z/|z - \alpha_k| = R_k\right\}, |z_0 - \alpha_k| < R_0$$

где числа R_k, $k=1, \ldots, m$ выбраны так, что

$$\Gamma(z_0R_0)\bigcap_{i}\Gamma(\alpha_iR_i) = \varnothing \quad \Gamma(\alpha_iR_i)\bigcap_{i \neq j}\Gamma(\alpha_jR_j) = \varnothing$$

обозначим

$$G(z_0R_0): \{z/|z - z_0| < R_0\}, \quad G(\alpha_kR_k): \{z/|z - \alpha_k| > R_k\}.$$

Тогда

$$G = G((z_0R_0), (\alpha_1, R_1), \ldots, (\alpha_m, R_m)) = G(z_0R_0)\bigcap_{l=1}^{m} G(\alpha_l, R_l)$$

Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $G((z_0R_0) \ldots (\alpha_mR_m))$, выберем числа $R_0' < R_0$, $R_k' > R_k$ $k = 1, 2, \ldots, m$ так, чтобы окружности $\Gamma(z_0R_0')$, $\Gamma(\alpha_k, R_k')$ удовлетворяли условию (19). В области $\overline{G}((z_0R_0'), (\alpha_1, R_1') \cdot (\alpha_m, R_m'))$ напишем обобщенную формулу Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(z_0R_0')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\alpha_lR_l')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta\right\}. \tag{1.1}$$

Интегралы представим в виде суммы рядов, равномерно сходящихся в соответствующих областях

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(0)}(z - z_0)^n + \sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^{(k)}}{(z - \alpha_k)^n}\right\}, \tag{1.2}$$

где

$$b_n^{(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(z_0R_0')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \underset{k=1,\ldots,m}{b_n^{(k)}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\alpha_k, R_k')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha_k)^{-n+1}} d\zeta \tag{1.3}$$

Так как функция $f(z)$ голоморфна в области $G((z_0, R_0) \times \times (\alpha_1R_1) \cdot (\alpha_mR_m))$, то в формулах (1. 1), (1. 2), (1. 3) числа R_k' $(k = 0, \ldots, m)$ можем выбрать сколько угодно близко к R_k. Следовательно любая функция $f(z)$, голоморфная в области $G((z_0R_0),(a_1,R_1)\cdot\cdot(a_mR_m))$, представляется следующим образом:

$$f(z)=f_0(z)+f_1(z)+\ldots+f_m(z), \tag{1.4}$$

где

$$f_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_n^{(0)}(z-z_0)^n;\ \underset{k=1,\ldots,m}{f_k(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^{(n)}}{(z-a_k)^n}. \tag{1.5}$$

Притом функция $f_k(z)$ $(k=0,1,\ldots,m)$ голоморфна в области $G(a_k,R_k)$ и $f_k^{(\infty)}=0$ при $k=1,2,\ldots,m$.

Теорема 1.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $G((z_0,R_0)\cdot\cdot\cdot(a_m,R_m))$.*

Пусть далее $\omega_k(x)\in\Omega$, $p_k(r)\in P_{\omega_k}$, а функции $f_k(z)$ определяются формулами (1.3) *и* (1.5).

Тогда

1°. *Функции*

$$f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})\equiv L^{(\omega_0)}\{f_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})\},$$

$$f_k^{(\omega_k)}\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)\equiv L^{(\omega_k}\left\{f_k\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)\right\}\ k=1,\ldots,m$$

голоморфны соответственно в областях $G(z_0,R_0)$ и $G(a_k,R_k)$

2°. *Для любой $\underset{k=0\ldots m}{\rho_k}$ $(0<\rho_k<1)$, $z\in G\left((z_0,R_0\rho_0),\left(a_1,\frac{R_1}{\rho_1}\right),\ldots,\left(a_m,\frac{R_m}{\rho_m}\right)\right)$ справедливы интегральные формулы*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C\left(\frac{z-z_0}{R_0\rho_0}e^{-i\theta},\omega_0\right)f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C\left(\frac{R_k}{\rho_k(z-a_k)}e^{-i\theta},\omega_k\right)f_k^{(\omega_k)}\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)d\theta \tag{1.6}$$

$$f(z)=iI_mf_0(z_0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{z-z_0}{R_0\rho_0}e^{-i\theta},\omega_0\right)Re\,f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(\frac{R_k}{\rho_k(z-a_k)}e^{-i\theta},\omega_k\right)Re\,f_k^{(\omega_k)}\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)d\theta \tag{1.7}$$

Доказательство. Так как в (1.4) функции $f(z)$ $k=0,\ldots,m$ голоморфны в областях $G_0(z_0R_0)$ и $G(a_kR_k)$, то написав теорему (3) (([1]), стр. 1091) для функции $f_k^*(w)=f_k\left(a_k+\frac{R_k}{w}\right)$ при $k\neq0$ и для функции

$f_0^*(w)=f_0(z_0+R_0w)$ при $k=0$ и переходя к переменному z, получим утверждения.

Теорема 1. 2. *Пусть $u(z)$ гармоническая функция области*

$$G((z_0R_0)(\alpha_1, R_1)\cdot\cdot\cdot,(\alpha_m, R_m))$$

Тогда

1°. ***Функция $u(z)$ представляется следующим образом:***

$$u(z)=u_0(z)+u_1(z)+\ldots+u_m(z)\quad z\in G((z_0, R_0), (\alpha_1,R_1)\ldots,(\alpha_m,R_m)) \quad (1.8)$$

где функции $u_k(z)$ $k=0,\ldots, m$ гармоничны соответственно в областях $G(z_0, R_0)$ и $G(\alpha_k, R_k)$

2°. ***Функции***

$$u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})=L^{(\omega_0)}\{u_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})\},$$

$$\underset{k=1,\ldots,m}{u_k^{(\omega_k)}}\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)=L^{(\omega_k)}\left\{u_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)\right\} \quad (1.8')$$

будут гармоничными соответственно в $G(z_0, R_0)$ и $G(\alpha_k, R_k)$

3°. *Для любой* $\underset{k=0,\ldots,m}{\rho_k(0<\rho_k<1)}$, $z\in G\left((z_0,R_0\rho_0),\left(\alpha_1,\frac{R_1}{\rho_1}\right),\ldots,\left(\alpha_m,\frac{R_m}{\rho_m}\right)\right)$ ***справедлива интегральная формула***

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left|\varphi_0-\theta,\frac{r_0}{R_0\rho_0},\omega_0\right|u^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left|-\varphi_k-\theta,\frac{R_k}{r_k\rho_k},\omega_k\right|u_k^{(\omega_k)}\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)d\theta \quad (1.9)$$

где

$$\varphi_0=\arg(z-z_0),\ \varphi_k=\arg(z-\alpha_k),\ r_0=|z-z_0|,\ r_k=|z-\alpha_k|\ \ k=1,\cdot\cdot, m,$$

$$P(\theta, r, \omega)=ReS(re^{i\theta}, \omega)$$

Доказательство. С помощью функции $u(z)$ с точностью до слагаемого $i\Gamma$, где Γ — вещественное число, восстановим аналитическую в области $G((z_0, R_0), (\alpha_1, R_1),\cdot\cdot\cdot(\alpha_m, R_m^*))$ функцию $f(z)$, действительная часть которой совпадает с $u(z)$. В представлении (1.4) функции $f(z)$, приравнивая действительные части, получим тождество (1.8).

В представлении (1.8)

$$u_k(z)=Re\,f_k(z) \quad (1.8'')$$

где $f_k(z)$ определены формулами (1.3) и (1.5).

Доказательство 2° и 3° следует из теоремы 1.1).

Обозначим

$$U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\cdot\cdot\cdot,\rho_m, \theta_0,\ldots,\theta_m)=U_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})+$$

$$+U_1^{(\omega_1)}\left(\alpha_1+\frac{R_1}{\rho_1e^{i\theta_1}}\right)+\cdot\cdot\cdot+U_m^{(\omega_m)}\left(\alpha_m+\frac{R_m}{\rho_me^{i\theta_m}}\right) \quad (1.10)$$

и

$$U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta)\equiv U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)/_{\theta_0,\ldots,\theta_m=\theta}, \qquad (1.10')$$

где функции $u_k(z)$ и $u_k^{(\omega_k)}$ определены формулами (1.8), (1.8″) и (1.8′).

Далее обозначим через $U_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(G)$ и $U^*_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(G)$ классы функций $u(z)$, гармоничных в области $G((z_0,R_0),(a_1,R_1),\ldots,(a_m,R_m))$, которые соответственно удовлетворяют следующим условиям

$$\sup_{\substack{0<\rho_k<1\\ k=0,\ldots,m}}\Big\{\underbrace{\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}}_{(m+1)}\Big|U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)\Big|d\theta_0\ldots d\theta_m\Big\}=C<+\infty \qquad (1.11)$$

и

$$\sup_{\substack{0<\rho_k<1\\ k=0,\ldots,m}}\Big\{\int_0^{2\pi}\Big|U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta)\Big|d\theta\Big\}=C^*<+\infty \qquad (1.11')$$

Теорема 1.3°. *Условия (1.11) и (1.11′) эквивалентны, каждое из них равносильно тому, чтобы одновременно выполнялись*

$$\sup_{0<\rho_i<1}\Big\{\int_0^{2\pi}\Big|u_i^{(\omega_i)}\Big(a_i+\frac{R_i}{\rho_i e^{i\theta}}\Big)\Big|d\theta\Big\}<C_i<+\infty \quad i\neq 0 \qquad (1.12)$$

$$\sup_{0<\rho_0<1}\Big\{\int_0^{2\pi}\Big|u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})\Big|d\theta_0\Big\}<C_0<+\infty \qquad (1.12')$$

Доказательство. Если выполняется условие (1.11), то фиксируя числа $\rho_0,\ldots,\rho_{l-1},\rho_{l+1},\ldots,\rho_m$, а ρ_l меняя в интервале (0,1), можем написать:

$$\sup_{0<\rho_l<1}\Big\{\underbrace{\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}}_{(m+1)}\Big|U_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)\Big|d\theta_0,\ldots,d\theta_m\Big\}\leqslant C.$$

Так как

$$\Big|U^{(\omega_l)}\Big(a_l+\frac{R_l}{\rho_l e^{i\theta_l}}\Big)\Big|\leqslant\Big|U^{(\omega_0,\ldots,\omega_m)}(\rho_0,\ldots,\rho_m,\theta_0,\ldots,\theta_m)\Big|+$$

$$+\Big\{\Big|u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})\Big|+\ldots+\Big|u_{l-1}^{(\omega_{l-1})}\Big(a_{l-1}+\frac{R_{l-1}}{\rho_{l-1}e^{i\theta_{l-1}}}\Big)\Big|+$$

$$+\Big|u_{l+1}^{(\omega_{l+1})}\Big(a_{l+1}\frac{R_{l+1}}{\rho_{l+1}e^{i\theta_{l+1}}}\Big)\Big|+\ldots+\Big|u_m^{(\omega_m)}\Big(a_m+\frac{R_m}{\rho_m e^{i\theta_m}}\Big)\Big|\Big\}$$

то

$$(2\pi)^{m-1}\int_0^{2\pi}\Big|u_l^{(\omega_l)}\Big(a_l+\frac{R_l}{\rho_l e^{i\theta_l}}\Big)\Big|d\theta_l\leqslant C+(2\pi)^{m-1}\sum_{\substack{k=0\\ k\neq l}}^{m}\int_0^{2\pi}\Big|u_k^{(\omega_k)}\Big(a_k+$$

$$+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta_k}}\Big)\Big| d\theta_k$$

$\rho_0,\dots,\rho_{i-1},\rho_{i+1},\dots,\rho_m$ мы могли фиксировать так, что сумма, написанная в правой части этого равенства, была ограниченной. Отсюда получаем (1.12). (1.12′) получается аналогично. Наоборот, если выполнены условия (1.12) и (1.12′), то так как

$$|u^{(\omega_0,\dots,\omega_m)}(\rho_0,\dots,\rho_m,\theta_0,\dots,\theta_m)|\leqslant|u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})|+$$

$$+\left|u_1^{(\omega_1)}\left(a_1+\frac{R_1}{\rho_1e^{i\theta_1}}\right)\right|+\dots+\left|u_m^{(\omega_m)}\left(a_m+\frac{R_m}{\rho_m e^{i\theta_m}}\right)\right|,$$

будет выполняться и условие (1.11).

Равносильность (1.11) и (1.12) (1.12′) доказывается аналогично

Теорема 1.4. 1°. *Класс $U_{\omega_0,\dots,\omega_m}(G)$ совпадает с множеством функций, представимых следующим образом*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\varphi_0-\theta,\frac{r_0}{R_0},\omega_0\right)d\psi_0(\theta)+$$

$$+\sum_{k=1}^m\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(-\varphi_k-\theta,\frac{R_k}{r_k},\omega_k\right)d\psi_k(\theta)\quad 0\leqslant\varphi_k\leqslant 2\pi \tag{1.13}$$

где $\psi_k(\theta)$ $k=0,\dots,m$ вещественные функции с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$, а φ_k, r_k, $P(\varphi,r,\omega)$, те же, что и в теореме 1.2.

2°. *В представлении* (1.15) *функция $\psi_k(\theta)$ может быть определена с помощью предела*

$$\psi_0(\theta)=\lim_{n_0\to+\infty}\int_0^\theta U_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_{0,n_0}e^{i\varphi})d\varphi;\ \psi_k(\theta)=\lim_{n_k\to+\infty}\int_0^\theta U_k^{(\omega_k)}\Big(a_k+$$

$$+\frac{R_k}{\rho_{k,n_k}e^{i\varphi}}\Big)d\varphi, \tag{1.14}$$

где $\rho_{k,n_k}\uparrow 1$ при $n_k\to+\infty$

3°. $U^{(i)}_{\omega_0,\dots,\omega_m}(G)$, *для которой* $u_i^{(\omega_i)}\left(a_i+\frac{R_i}{\rho_ie^{i\varphi}}\right)\geqslant 0$ *в* $G(a_k,R_k)$, $i\neq 0$ *или* $u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\varphi})\geqslant 0$ *при* $i=0$ *в* $G(z_0,R_0)$ *в представлении* (1.15) *соответствующая функция $\psi_k(\theta)$ не убывает на* $[0,2\pi]$.

Доказательство. При условии (1.12) и (1.12′) (см. теорему 1.3) если напишем теорему (5) М. М. Джрбашяна ([1], стр. 1095) для функции $u_0^*(w)=u_0(z_0+R_0w)$ и функции $u_i^*(w)=u_i\left(a_i+\frac{R_i}{w}\right)=$ $=u_-(z)$ и переходим к переменному z, то из (1.8) получим доказательство теоремы.

Теорема 1.5 *Пусть функция $\omega_i(x)\in\Omega$ при $i=0,1,\dots,m$. Тогда*

1°. *Если функция* $\omega_k(x)$ *не убывает на* $[0.1)$ *и* $\omega_k(x)\uparrow+\infty$ *при* $x\to 1$, *то*

$$U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)\subset U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G) \tag{1.15}$$

2°. *Если функция* $\omega_k(x)$ *не возрастает на* $[0,1)$ *и* $\omega_k(x)\downarrow 0$ *при* $x\uparrow 1$, *то*

$$U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)\subset U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G) \tag{1.16}$$

3°. *В соответствующих условиях включения (1.15) и (1.16) строгие.*

Здесь

$$U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)\equiv U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)\,/\,\omega_k(x)\equiv 1$$

Доказательство. Пусть $u(z)\in U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$. Тогда (см. доказательство теоремы 1.3 и 1.4)

$$u_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P(\theta_0-\theta,\rho_0,\omega_0)\,d\psi_0(\theta);$$

$$u_i\left(\alpha_i+\frac{R_i}{\rho_ie^{i\theta_i}}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P(\theta_i-\theta,\rho_i,\omega_i)\,d\psi_i(\theta)$$

Если $k=0$, то $P(\theta_0-\theta,\rho_0,\omega_0)\geqslant 0$, а при $k\neq 0$ $P(\theta_k-\theta,\rho_k,\omega_k)\geqslant 0$ (([1]), стр. 1093). Отсюда получим (([1]), стр. 1097)
при $k=0$

$$\sup_{0<\rho_0<1}\left\{\int\limits_0^{2\pi}|u_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})|\,d\theta_0\right\}<+\infty \tag{1.17'}$$

а при $k\neq 0$

$$\sup_{0<\rho_k<1}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\left|u_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta_k}}\right)\right|d\theta_k\right\}<+\infty \tag{1.17}$$

Так как из условия (1.18) или (1.17′) и из условия (1.12′) или (1.14′) следует условие (1.11) при $\omega_k(x)\equiv 1$, то $u(z)\in U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$,

2.° Пусть $u(z)\in U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$. Тогда выполняются условия (1.12) и (1.17′) или (1.12′), (1.17) и (1.12) при $i\neq k$. Положим $\omega_k(0)=1$. По аналогии (([1]), стр. 1098) получается

$$\sup_{0<\rho_k<1}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\left|u_k^{(-\omega_k)}\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta_k}}\right)\right|d\theta_k\right\}<+\infty \text{ при } k\neq 0$$

или

$$\sup_{0<\rho_0<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|u_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})\right|d\theta_0\right\}<+\infty \quad k=0$$

отсюда вытекает, что $u(z)\in U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$

3°. Обозначим

$$P(\varphi_0,\dots,\varphi_m,\theta,\omega_0,\dots,\omega_m)\equiv P\left(\varphi_0-\theta,\frac{r_0}{R_0},\omega_0\right)+\sum_{k=1}^{m}P\left(-\varphi_k-\theta,\frac{R_k}{r_k},\omega_k\right)$$

Тогда ((1), стр. 1098–99) $P(\varphi_0,\dots,\varphi_m,\theta,\omega_0,\dots\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m)\subset$ $\subset U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$, но не принадлежит к классу $U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$, а функция $P(\varphi_0,\dots,\varphi_m,\theta,\omega_0,\dots,\omega_k,\dots,\omega_m)$ принадлежит к классу $U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},\omega_k,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$, но не принадлежит к классу $U_{\omega_0,\dots,\omega_{k-1},1,\omega_{k+1},\dots,\omega_m}(G)$.

Обозначим

$$f^{(\omega_0,\dots,\omega_m)}(\rho_0,\dots,\rho_m,\theta_0,\dots,\theta_m)\equiv f_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta_0})+f_1^{(\omega_1)}\left(a_1+\frac{R_1}{\rho_1e^{i\theta_1}}\right)+\dots$$

$$\dots+f_m^{(\omega_m)}\left(a_m+\frac{R_m}{\rho_me^{i\theta_m}}\right), \tag{1.18}$$

где функции $f_k(z)$ $k=0,\dots,m$ определяются формулой (1,5).

Обозначим через $R_{\omega_0,\dots,\omega_m}(G)$ класс функций, аналитических в $G((z_0,R_0),\dots,(a_m,R_m))$, удовлетворяющих условию:

$$\sup_{\substack{0<\rho_k<1\\ k=0\dots m}}\Bigg\{\underbrace{\int_0^{2\pi}\dots\int_0^{2\pi}}_{m+1}\left|Ref^{(\omega_0,\dots,\omega_m)}(\rho_0,\dots,\rho_m,\theta_0,\dots,\theta_m)\right|d\theta_0\dots d\theta_m\Bigg\}<+\infty. \tag{1.19}$$

Теорема 1.6. 1°. *Класс $R^{\omega_0,\dots,\omega_m}(G)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых в виде*

$$f(z)=iC_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{-i\theta}\frac{z-z_0}{R_0},\omega_0\right)d\psi_0(\theta)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{-i\theta}\frac{R_k}{z-a_k},\omega_k\right)d\psi_k(\theta), \tag{1.20}$$

где $Im\ C_0=0$ $\psi_k(\theta)$ $k=0,\dots,m$ — вещественные функции с конечным изменением на $[0,2\pi]$

2°. *Если для $f(z)\in R^{\omega_0,\dots,\omega_m}(G)$ в разложении* (1.4) $Ref_0^{(\omega_0)}(z)\geqslant 0$ *или $Ref_k^{(\omega_k)}(z)\geqslant 0$, то в представлении* (1.20) $\psi_0(\theta)$ *или* $\psi_k(\theta)$ *неубывающая ограниченная функция на* $[0,2\pi]$.

Доказательство. Условие (1.19) эквивалентно следующим условиям (см. доказательство теоремы 1.3)

$$\sup_{0<\rho_k<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|Ref_k^{(\omega_k)}\left(a_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta_k}}\right)\right|d\theta_k\right\}<+\infty \tag{1.21}$$

и

$$\sup_{0<\rho_0<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|Ref_0^{(\omega_0)}(z_0+R_0\rho_0 e^{i\theta_0})\right|d\theta_0\right\}<+\infty$$

отсюда по теореме (7) М. М. Джрбашяна ([1]. стр 1100) получается доказательство.

Автор благодарит В. С. Захаряна за руководство.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Դ. Թ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Բազմակապ տիրույթներում հարմոնիկ և անալիտիկ ֆունկցիաների դասեր և նրանց պարամետրական ներկայացումները

Հոդվածում բազմակապ տիրույթների համար ստացված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի՝ շրջանում հարմոնիկ և անալիտիկ ֆունկցիաների համար արդյունքների անալոգները։

Բազմակապ տիրույթների համար, որոնց եզրերը շրջանագծեր են, սահմանված են հարմոնիկ ֆունկցիաների և անալիտիկ ֆունկցիաների դասեր և ստացվել է նրանց պարամետրական ներկայացումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 М. М. *Джрбашян*, «Изв АН СССР», сер. мат. 32 (1968).