ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 1

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

З. А. Давтян

О двух задачах кручения усиленного тонким покрытием бесконечного цилиндра в условиях неоднородной ползучести

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Б Л. Абрамяном 8/II 1979)

В настоящей статье, на основе результатов работ [1-5] в рамках теории ползучести Н. Х. Арутюняна для неоднородно стареющих тел, построены эффективные решения двух контактных задач о передаче нагрузки от тонкой бесконечной цилиндрической оболочки к бесконечно длинному сплошному цилиндру или бесконечному пространству с цилиндрическим отверстием при кручении, когда материалы контактирующих пар обладают свойствами ползучести и имеют разные возрасты. Указанные задачи математически описываются интегро-дифференциальными уравнениями. Построены их замкнутые решения.

1. Упомянутые две задачи будут рассматриваться параллельно.

В первой задаче бесконечно длинный сплошной цилиндр радиуса R, усиленный по своей поверхности покрытием в виде тонкой бесконечной цилиндрической оболочки малой толщины h, скручивается касательными силами интенсивности $q_0(z, t)$, приложенными на двух симметрических отрезках $(-b, -a)$ и (a, b) (рис. 1).

Во второй задаче бесконечное пространство с цилиндрическим отверстием радиуса R, усиленное тонкой бесконечной цилиндрической оболочкой толщины h, опять скручивается касательными силами интенсивности $q_0(z, t)$, действующими на отрезках $(-b, -a)$ и (a, b).

Будем считать, что материалы оболочки и цилиндра обладают свойствами ползучести. Пусть $C_1(t, \tau)$—мера ползучести, $G_1(t)$—переменный во времени модуль упругости и $\tau_1(z)$—зависящий от осевой

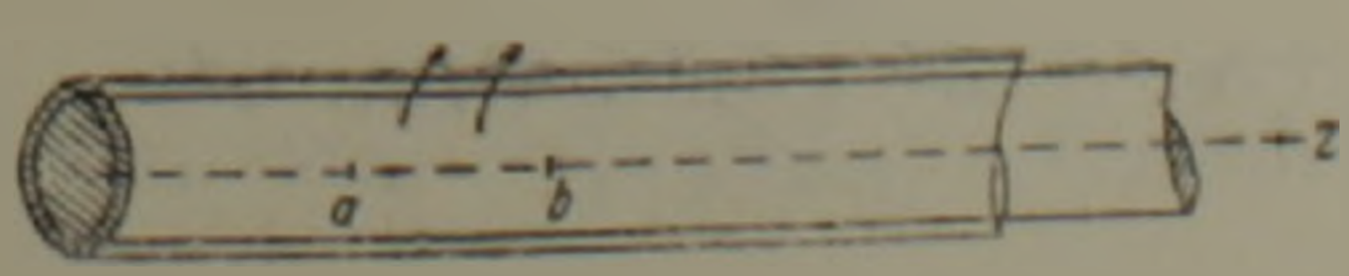

Рис. 1

координаты возраст материала тонкого покрытия. Пусть $C_2(t, \tau)$ будет мерой ползучести, $\tau_2(z)$—возрастом и $G_2(t)$—переменным во времени модулем сдвига материала цилиндра. В дальнейшем примем, что

$$G_1(t) = G_1 = \text{const}, \ G_2(t) = G_2 = \text{const}, \ \tau_2(z) = \text{const}.$$

Выведем разрешающие уравнения поставленных задач. Сначала обратимся к первой задаче. Согласно теории тонких оболочек [7] напряженно-деформированное состояние тонкой цилиндрической оболочки при кручении описывается уравнением

$$\frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z} = \frac{2(1+\mu)}{G_1 h}\Big[-q_0(z, t) - (qz, t)\Big]. \qquad (1.\ 1)$$

Здесь $v_1(z, t)$—перемещение точек оболочки в трангенциальном направлении, μ—коэффициент Пуассона материала оболочки, h—толщина, а $q(z, t)$—искомый закон распределения трангенциальных контактных напряжений на поверхности соединения оболочки с цилиндром.

С другой стороны, перемещение с учетом ползучести материала через упруго-мгновенное перемещение, выражается применительно к разбираемому случаю следующей формулой [6]:

$$v_1^*(z, t) = v_1(z, t) - E_1 \int_{\tau_0}^{t} K_1[t + \rho_1(z), \ \tau + \rho_1(z)]\, v_1(z, \tau)\, d\tau;$$

$$K_1(t, \tau) = \frac{\partial c_1(t, \tau)}{\partial \tau}, \ \rho_1(z) = \tau_1(z) - \tau_0(0). \qquad (1.\ 2)$$

Уравнение (1, 2) с учетом (1. 1) примет вид

$$\frac{\partial v_1(z, t)}{\partial z} = -\frac{2(1+\mu)}{G_1 h}\Big[q_0(z, t) + q(z, t) + \frac{2(1+\mu)}{h} \times$$

$$\times \int_{\tau_0}^{t} K_1[t + \rho_1(z), \ \tau + \rho_1(z)]\,[q_0(z, \tau) + q(z, \tau)]\, d\tau. \qquad (1.\ 3)$$

Перемещения же $v_2^*(z, t)$ граничных точек скручиваемого сплошного цилиндра с учетом ползучести на основе преобразования Фурье определяются формулой

$$v_2^*(z, t) = -\frac{2}{\pi G_2}\int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(z, z_0)\, q(z_0, t)\, dz_0 + \frac{2}{\pi}\int_{\tau_0}^{t} K_2[t +$$

$$+ \rho_2, \ \tau + \rho_2]\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_{11}(z, z_0)\, q(z_0, \tau)\, dz, \qquad (1.\ 4)$$

где

$$K_{11}(z,\ z_0) = \int_0^\infty \frac{\sin(sz_0)\cdot\sin(st)I_1(Rs)}{sI_3(Rs)}\,ds;$$

$$K_2(t,\ \tau) = \frac{\partial C_2(t,\ \tau)}{\partial\tau},\ \rho_2 = \tau_2 - \tau_0,\ \tau_0 = \tau_1(0).$$

Здесь $I_n(x)$—модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента первого рода индекса n, а s параметр преобразования Фурье.

Далее, принимая во внимание условие контакта

$$v_1^*(z,t) = v_2^*(z,t) \quad (-\infty < z < \infty)$$

и учитывая формулы (1. 3) и (1. 4), задачу определения неизвестных контактных напряжений $q(z,\ t)$ сводим к решению следующего интегродифференциального уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_{11}(z,\ z_0)}{\partial z}\varphi'(z_0,\ t)dz_0 - \lambda\varphi(z,\ t) = G_2\int_{\tau_0}^{t}K_2[t+\rho_2,\ \tau+\rho_2]d\tau\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_{11}(z,\ z_0)}{\partial z}\varphi'(z_0,\ \tau)dz_0 - \lambda^*\int_{\tau_0}^{t}K_1[t+\rho_1(z),\ \tau+$$

$$+\rho_1(z)]\varphi(z,\ \tau)d\tau - \theta f(z,\ t), \tag{1. 5}$$

где положено

$$\varphi(z,\ t) = \int_{-\infty}^{z}q(x,\ t)dx,\ \lambda = \frac{\pi G_2(1+\mu)}{G_1h},\ \lambda^* = \frac{\pi G_2(1+\mu)}{h},\ \theta = \pi G_2(1+\mu),$$

$$f(z,\ t) = -\frac{1}{G_1h}\int_{-\infty}^{z}q_0(x,t)dx + \frac{1}{h}\int_{\tau_0}^{t}K_1[t+\rho_1(z),\ \tau+\rho_1(z)]\,d\tau\int_{-\infty}^{z}q_0(x,\ \tau)d\tau.$$

Подчеркнем, что напряжение $q_0(z,\ t)$ действует на отрезках $[-b,\ -a]$ и $[a,\ b]$, хотя они могут быть распределены произвольным образом.

Поступая вполне аналогичным образом, находим, что решение второй задачи сводится к решению следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_{12}(z,\ z_0)}{\partial z}\varphi'(z_0,\ t)dz_0 - \lambda\varphi(z,\ t) = C_2\int_{\tau_0}^{t}K_2[t+\rho_2,\tau+\rho_2]d\tau\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K_{12}(z,\ z_0)}{\partial z}\varphi'(z_0,\ \tau)dz_0 - \lambda^*\int_{\tau_0}^{t}K_1[t+\rho_1(z),\ \tau+\rho_1(z)]\varphi(z,\ \tau)d\tau -$$

$$-\theta f(z, t), \tag{1.6}$$

где

$$K_{12}(z, z) = \int_0^\infty \frac{\sin(sz_0) \cdot \sin(sz) K_1(Rs)}{sK_2(Rs)} \, ds.$$

Здесь $K_n(x)$ — модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента второго рода индекса n.

2. Как указано в работе ([2]), при произвольной функции $\rho_1(z)$ решение уравнения (1. 5) затруднительно. В частном случае, когда возраст оболочки не зависит от z, но отличен от возраста цилиндра и равен $\rho_1(z) = \rho_1 = \mathrm{const}$, решения уравнения (1. 5) можно получить в замкнутой форме. Легко видеть что можно положить $\rho_1 = 0$.

С указанной целью применим к обеим частям уравнения (1. 5) преобразования Фурье по z, в результате чего приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$[\lambda + 2\pi u I_1(Ru)/I_2(Ru)]\Phi(u, t) = \int_{\tau_0}^{t} [\lambda^* K_1(t, \tau) + 2\pi u G_2 I_1(Ru)/I_2(Ru) \times$$

$$\times K_2(t+\rho_2), \tau+\rho_2)]\Phi(u, \tau)d\tau - iu\theta F(u, t), \tag{2.1}$$

где $\Phi(u, t)$, $F(u, t)$ — трансформант и Фурье от $\varphi'(z_0, t)$ и $f(z,t)$ соответственно. Если для мер ползучести примем выражение ([2])

$$C_1(t, \tau) = \varphi_1(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad C_2(t, \tau) = \varphi_2(\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

где $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ — функции, определяющие процесс старения материала оболочки и цилиндра соответственно, и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то можно показать, что решение интегрального уравнения (2. 1) эквивалентно решению дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\Phi''(u, t) + A(u, t)\Phi'(u, t) = P(u, t). \tag{2.2}$$

При начальных условиях

$$\left| \begin{aligned} &\Phi(u, t)|_{t=\tau_0} = -iu\theta I_2(Ru)F(u, \tau_0)/[\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)] \\ &\Phi'(u, t)|_{t=\tau_0} = \gamma\theta[\lambda^* \varphi_1(\tau_0) + 2\pi u G_2 \varphi_2(\tau_2) I_1(Ru)/I_2(Ru)] \times \\ &\quad \times iu\{I_2(Ru)/[\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)]\}^2 F(u, \tau_0) - \\ &\quad\quad - iu\theta I_2(Ru)F'(u, \tau_0)/[\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)]. \end{aligned} \right. \tag{2.3}$$

Здесь

$$A(u, t) = \gamma[\lambda + 2\pi u \Psi(u) + \lambda^* \varphi_1(t) + 2\pi u \Psi(u) \varphi_2(t + \tau_2 - \tau_0)],$$

$$\Psi(u) = I_1(Ru)/I_2(Ru),$$

$$P(u, t) = -iu\theta[F''(u, t) + \gamma F'(u, t)] I_2(Ru)/[\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)].$$

Решение дифференциального уравнения (2. 2) при начальных условиях (2. 3) имеет вид ([6]).

$$\Phi(u, t) = \int_{\tau_0}^{t} e^{-\gamma(u, \tau)} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\gamma(u, y)} P(u, y) dy + \Phi'(u, \tau_0) \int_{\tau_0}^{t} e^{-\gamma(u, \tau)} d\tau + \Phi(u, \tau_0), \tag{2.4}$$

где

$$\eta(u, t) = \int\limits_{\tau_0}^{t} A(u, \tau) d\tau$$

При помощи обратного преобразования Фурье определим решение исходного уравнения (1, 5)

$$\varphi'(z, t) = q(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, t) e^{-iuz} du. \qquad (2.\ 5)$$

Рассмотрим частный случай внешней нагрузки $q_0(z, t) = Q\delta(z - z_0)H(t - \tau_0)$, где $\delta(x)$—функция Дирака, $H(t)$—единичная функция Хевисайда. При указанной нагрузке будем иметь

$$f(z, t) = -\frac{Q}{G_1 h} H(z - z_0) H(t - \tau_0) + \frac{Q}{h} H(z - z_0) \int\limits_{\tau_0}^{t} K_1(t, \tau) H(\tau - \tau_0) d\tau, \qquad (2.\ 6)$$

где

$$F(u, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z, t) e^{iuz} dz.$$

Далее находим

$$F(u, t) = \frac{Q}{iuh} \left\{ \frac{1}{G_1} + \varphi_1(\tau_0) [1 - e^{-\gamma(t - \tau_0)}] \right\}, \quad t \geqslant \tau_0. \qquad (2.\ 7)$$

Подставив $F(u, t)$ из формулы (2. 7) в (2. 4), получим

$$\Phi(u, t) = -\lambda Q \frac{I_2(Ru)}{\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)} \left\{ 1 + 2\pi u \gamma \frac{I_1(Ru)}{\lambda I_2(Ru) + 2\pi u I_1(Ru)} \times \right.$$

$$\left. \times [G_1 \varphi_1(\tau_0) - G_2 \varphi_2(\tau_2)] \int\limits_{\tau_0}^{t} e^{-\eta(u, \tau)} d\tau \right\}. \qquad (2.\ 8)$$

Отсюда

$$q(z, t) = -$$

$$-\frac{Q\beta}{2\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\beta + u\Psi(u)} \left| 1 + \gamma u \Psi(u) \frac{G_1 \varphi_1(\tau_0) - G_2 \varphi_2(\tau_2)}{\beta + u\Psi(u)} \int\limits_{\tau_0}^{\tau} e^{-x(u, \tau)} d\tau \right| \right\} \cos(uz) du, \qquad (2.9)$$

где

$$\beta = \frac{G_2(1 + \mu)}{2G_1 h}, \quad \beta_1 = \frac{G_2(1 + \mu)}{2h},$$

$$\chi(u, t) = 2\pi\gamma \int_{\tau_0}^{t} [\beta + u\Psi(u) + \beta_1\varphi_1(\tau) + G_2 u \Psi(u)\varphi_2(\tau + \tau_2 - \tau_0)] d\tau.$$

Если деформации ползучести оболочки цилиндра пропорциональны их упругим деформациям $G_1\varphi_1(\tau_0) = G_2\varphi_2(\tau_2)$, то для контактных напряжений $q(z,t)$, согласно (2. 9), получим

$$q(z) = -\frac{Q\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(uz)}{\beta + u\Psi(u)} du. \tag{2. 10}$$

С целью выяснения поведения функции $\Psi(u)$ при $u \to \infty$ пользуемся известными асимптотическими представлениями функций $I_1(u)$ и $I_2(u)$ из ([8]). В результате придем к асимптотической формуле

$$\Psi(u) \simeq 1. \tag{2. 11}$$

Учитывая (2. 11), можем записать

$$\frac{1}{\beta + u\Psi(u)} = \frac{1}{\beta + u} + \Psi_0(u),$$

где

$$\Psi_0(u) = \frac{1 - \Psi(u)}{(\beta + u)[\beta + u\Psi(u)]} u.$$

Теперь из (2. 10) будем иметь

$$q(z) = -\frac{Q\beta}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(uz)}{\beta + u} du + \int_0^{\infty} \cos(uz)\Psi_0(u) du \right].$$

После некоторых элементарных выкладок

$$q(z) = \frac{Q\beta}{2\pi} \left[\cos(\beta z) \cdot \mathrm{ci}(\beta z) + \sin(\beta z) \cdot \mathrm{si}(\beta z) \right] - \frac{Q\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos(uz)\Psi_0(u) du, \tag{2. 12}$$

где $\mathrm{ci}(x)$, $\mathrm{si}(x)$ — интегральные косинус и синус функций.

Первое слагаемое в (2. 12) с точностью некоторых коэффициентов совпадает с известным решением Мелана ([6]).

Поступив совершенно аналогичным способом, находим, что решение второй задачи в указанном частном случае внешней нагрузки будет даваться формулой

$$q(z, t) = -$$

$$-\frac{Q\beta}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{\beta + u\Psi_1(u)} \left[1 + \gamma u \Psi_1(u) \frac{G_1\varphi_1(\tau_0) - G_2\varphi_2(\tau_2)}{\beta + u\Psi_1(u)} \int_{\tau_0}^{t} e^{-\chi_1(u,\tau)} d\tau \right] \right\} \cos(uz) du. \tag{2. 13}$$

Здесь

$$\Psi_1(u) = \frac{K_1(Ru)}{K_2(Ru)},$$

$$\chi_1(u, \tau) = 2\pi\gamma\int_{\tau_0}^{t}[\beta + u\Psi_1(u) + \beta_1\varphi_1(\tau) + G_2 u\Psi_1(u)\varphi_2(\tau + \tau_2 - \tau_0)]d\tau.$$

Если положить $G_1\varphi_1(\tau_0) = G_2\varphi_2(\tau_2)$, то для контактных напряжений $q(z, t)$ находим

$$q(z) = -\frac{Q\beta}{2\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(uz)}{\beta + u\Psi_1(u)}du.$$

Автор весьма признателен академику АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняну и С. М. Мхитаряну за постановку задач и ценные указания.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Զ. Ա. ԴԱՎԹՅԱՆ

Բարակ ծածկույթով ուժեղացված անվերջ գլանի ոլորման երկու խնդրի մասին անհամասեռ սողքի պայմաններում

Աշխատանքում դիտարկված են Ն. Խ. Հարությունյանի կողմից առաջարկված անհամասեռորեն ծերացող մարմինների սողքի տեսության շրջանակներում, բարակ գլանային թաղանթից անվերջ հոծ գլանին կամ գլանային անցքով տարածությանը ուժի փոխանցման երկու ոլորման խնդիրներ, երբ փոխազդեցության մեջ գտնվող մարմիններն օժտված են սողքի հատկությամբ և ունեն տարբեր հասակներ։ Նշված խնդիրները մաթեմատիկորեն ձևակերպված են ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների տեսքով։

Կառուցված են նրանց փակ լուծումները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян.* МТТ, № 3, 1976. [2] *Н. Х. Арутюнян.* ДАН СССР, т. 229, № 3 (1976). [3] *Н. Х. Арутюнян.* ДАН СССР, т. 231, № 3 (1976). [4] *Н. Х. Арутюнян.* ПММ т. 32, вып. 4 (1968). [5] *Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян.* сб. «Избранные проблемы прикладной механики», М., 1974. [6] *Н. Х. Арутюнян.* Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, М.—Л., 1952. [7] *В. В. Новожилов.* Теория тонких оболочек, Л., «Судпромгиз» 1951. [8] *E. Melan,* Ingenieur Archiv, 3, no 2, (1932). [9] *Г. Н. Ватсон.* Теория бесселевых функций, ч. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1949.