ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 1

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Г. Инджеян

О 3-раскраске плоских гиперграфов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 30/IV 1979)

В настоящей работе доказывается справедливость одной гипотезы М. И. Бурштейна ([1]). Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в ([2-4]).

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$—произвольное множество, а E—произвольное семейство его подмножеств. Пара $H=(X, E)$ называется гиперграфом с множеством вершин X и множеством ребер E. Будем считать, что $|e|\geqslant 2$ для любого $e\in E$.

Под раскраской гиперграфа понимается правильная раскраска его вершин в смысле Эрдеша — Хайнала, т. е. такая, при которой каждое ребро содержит по крайней мере две вершины разного цвета.

Каждому гиперграфу адекватно соответствует его граф инциденций, множеством вершин которого является $X\cup E$, а множеством ребер $\{(x, e)\in X\times E: x\in e\}$. Гиперграф называется плоским, если его соответствующий граф инциденций является плоским графом.

$m(H)$ обозначает число ребер гиперграфа H, а H' — граф, состоящий из его ребер степени 2 и инцидентных им вершин (в H' не может быть изолированных вершин).

Гипотеза М. И. Бурштейна состоит в следующем:

Если H—плоский гиперграф, для которого $m(H')\leqslant 8$ и H' не содержит полных четырехвершинных подграфов K_4, то H раскрашивается в 3 цвета.

Для доказательства ее справедливости установим одну теорему о плоских триангуляциях.

Плоский граф G с помеченными ребрами называется n-квазираскрашиваемым, если его вершины можно окрасить n цветами так, чтобы концы помеченных ребер были окрашены различно и край каждой грани содержал хотя бы две вершины разного цвета. Если все ребра графа G помечены, то квазираскраска совпадает с обычной раскраской.

Через $n_i=n_i(G)$ обозначим число вершин степени i в графе G. Известно, что для любого плоского графа

$$3n_3+2n_4+n_5\geqslant 12. \tag{1}$$

Напомним, что триангуляцией называется плоский граф, все грани которого — простые циклы длины 3. Допускаются кратные ребра (разумеется при условии, что пара таких ребер не образует края какой-то грани).

Теорема 1. *Вершины каждой плоской триангуляции с не более, чем 8 помеченными ребрами, которые не составляют K_4, можно квазираскрасить в 3 цвета.*

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, и пусть G — триангуляция с наименьшим числом вершин, удовлетворяющая условиям теоремы, но не допускающая 3-квазираскрасок. Она обладает следующими свойствами.

1. Если вершина $x\in G$ имеет степень 3, то все инцидентные ей ребра помечены.

2. $n_3(G)\leqslant 3$.

3. Если вершина $x\in G$ имеет степень 4, то по крайней мере два инцидентных ей ребра помечены, причем если их ровно два, то они находятся на краю одной и той же грани.

4. Пусть вершина $x\in G$ степени 4 инцидентна ребрам (x, x_1), (x, x_2), (x, x_3), (x, x_4); если два последних ребра не помечены, то и ребро (x_3, x_4) не помечено и принадлежит некоторому подграфу K_4, все остальные ребра которого помечены.

5. Число таких вершин $x\in G$ степени 4, у которых помечены лишь два инцидентных ребра, не может превосходить 1.

6. Если вершина $x\in G$ имеет степень 5, то по крайней мере два инцидентных ей ребра помечены.

Все эти шесть свойств доказываются методом от противного. В свойствах 2 и 5, если предположить обратное, получается, что G должен содержать не менее 9 помеченных ребер.

В свойствах 1, 3, 4 и 6, если предположить обратное, удаляется вершина $x\in G$ и добавляется, в случае необходимости, недостающее вебро. Получается новая триангуляция G' — удовлетворяющая условиям теоремы, но содержащая на одну вершину меньше, чем G. Из экстремальности G вытекает, что вершины новой триангуляции должны раскрашиваться в 3 цвета. После раскраски G' восстанавливается G и вершина x раскрашивается в один из трех цветов так, чтобы не образовалась одноцветная грань и концы помеченных ребер были окрашены различно. Таким образом, G раскрашивается в 3 цвета, вопреки нашему первоначальному предположению.

Пусть $m'=m'(G)$ — число помеченных ребер триангуляции G. Тогда из свойств 1—6 следует, что

$$2m'\geqslant\begin{cases}3n_3+3n_4-1+2n_5 & \text{при } n_4>0\\ 3n_3+2n_5 & \text{при } n_4=0.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что достаточно рассмотреть те системы значений n_3, n_4, n_5, для которых в (1) имеет место равенство.

Случай 1. $n_3=3$, $n_4=0$, $n_5=3$.

Если никакие две вершины степени 3 не имеют общего ребра, то противоречие очевидно. Пусть вершины x_1, x_2, x_3 имеют степень 3 и вершины x_1 и x_2 имеют общее ребро. Нетрудно убедиться, что кроме 8 помеченных ребер, инцидентных вершинам степени 3, должно быть помечено еще одно, что является противоречием.

Случай 2. $n_3=3$, $n_4=1$, $n_5=1$.

Аналогичным образом мы приходим к противоречию и в этом случае.

Случай 3. $n_3=2$, $n_4=0$, $n_5=6$.

Так как $2m' \geqslant 3n_3+2n_5=18$, то $m' \geqslant 9$, что является противоречием.

Случай 4. $n_3=2$, $n_4=1$, $n_5=4$.

Пусть x и y есть вершины степени 3, а x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 — вершины, смежные соответственно x и y. Пусть вершины степени 3 имеют общее ребро, и таким ребром является (x, x_2), т. е. $y=x_2$, $x=y_2$ и $x_1=y_1$, $x_3=y_3$. Нетрудно убедиться, что $\rho(x_i)>4$, при $i=1$ или 3, где $\rho(x_i)$ — степень вершины x_i. Нетрудно также убедиться, что $\rho(x_i)=5$ только при $i=1$ (или $i=3$). А это значит, что кроме 5 помеченых ребер должны быть помечены еще по крайней мере 4 ребра, что является противоречием.

Пусть теперь x и y не имеют общего ребра. Возможны следующие четыре подслучая.

а) $x_i=y_i$ при $i=\overline{1, 3}$.

Нетрудно убедиться, что с вершинами x_i в худшем случае могут совпасть две вершины степени $\leqslant 5$, а это значит, что кроме 6 ранее помеченных ребер должны быть помечены еще 3, что является противоречием.

б) $x_1=y_1$ и $x_3=y_3$.

Если, в худшем случае, обе вершины $x_1=y_1$ $x_3=y_3$ обладают степенью 5, то, очевидно, $\rho(x_2) \geqslant 6$, $\rho(y_2) \geqslant 6$, а это значит, что должны быть помечены еще 3 ребра, т. е. $m' \geqslant 9$, воперки условию теоремы.

в) $x_3=y_3$.

В худшем случае четыре вершины степени $\leqslant 5$ могут совпасть с вершинами x_1, x_2, y_1, y_2. Но каждой из этих вершин инцидентно не более 1 помеченного ребра из прежних 6 помеченных. А это значит, что кроме 6 помеченных ребер должны быть помечены еще по крайней мере $\frac{1+1+1+1+2}{2}=3$ ребра, т. е. $m' \geqslant 9$.

г) $x_i \neq y_i$ при $i=\overline{1, 3}$.

Вершины степени $\leqslant 5$ могут совпасть с вершинами x_i, y_i, где $i=\overline{1,3}$, т. е. кроме 6 ранее помеченных ребер должны быть помечены еще по крайней мере 3 ребра, т. е. $m' \geqslant 9$.

Случай 5. $n_3=2$, $n_4=2$, $n_5=2$.

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что и в этом случае мы приходим к противоречию.

Случай 6. $n_3=2$, $n_4=3$, $n_5=0$.

Здесь тоже разделяются подслучаи а), б), в) и г), в каждом из которых мы приходим к противоречию.

Случай 7. $n_3=1$, $n_4\in[0, 3]$, $n_5\in[3, 9]$.

Так как $2m'\geqslant 3n_3+3n_4-1+2n_5\geqslant 17$ для любой $n_4\in[0, 3]$ и соответствующей $n_5\in[3, 9]$, то противоречие очевидно.

Случай 8. $n_3=1$, $n_4=4$, $n_5=1$.

Пусть вершина x имеет степень 3. Нетрудно убедиться, что лишь 2 вершины степени $\leqslant 5$ могут быть смежны вершине x. А это значит, что кроме 3 помеченных должно быть помечено еще не менее $\dfrac{1+1+3+3+3}{2}$ ребер, т. е. $m'\geqslant 9$, что противоречит условию теоремы.

Случай 9. $n_3=0$, $n_4\in[0, 6]$, $n_5\in[0, 12]$ так, что $2n_4+n_5\geqslant 12$.

Так как $2m'\geqslant 3n_4-1+2n_5\geqslant 17$ для любых $n_4\in[0, 6]$ и соответствующих $n_5\in[0, 12]$, то противоречие и в этом случае очевидно.

Полученные противоречия во всех 9 случаях доказывают справедливость теоремы.

Из доказанной теоремы вытекает справедливость гипотезы М. И. Бурштейна. Это можно сделать так, как сделано, например в работе ([3]).

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Դ. ԻՆՃԻՅԱՆ

Հարթ հիպերգրաֆների 3-ներկման մասին

Աշխատանքը նվիրված է հիպերգրաֆի գագաթների Էրդյոշ-Հայնալի իմաստով ներկման պրոբլեմին։ H'-ով նշանակենք H հիպերգրաֆի գրաֆային կողերով և նրանց կից գագաթներով ծնված գրաֆը, $m(H)$-ով H հիպերգրաֆի կողերի քանակը։ Մ. Ի. Բուրշտեյնը ապացուցել է, որ 5-ից ոչ ավել թվով գրաֆային կողերով կամայական հարթ հիպերգրաֆ 3-ներկելի է և առաջ է քաշել հետևյալ վարկածը.

Վարկած. H հարթ հիպերգրաֆը 3-ներկելի է, եթե $m(H')\leqslant 8$ և H'-ը չի պարունակում K_4.

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ 8-ից ոչ ավելի թվով նշված կողերով յուրաքանչյուր եռանկյունացված հարթ մուլտիգրաֆ 3-քվազիներկելի է, եթե նշված կողերը չեն կազմում K_4։ Այստեղից հետևում է Մ. Ի. Բուրշտեյնի վարկածի ճշմարտացիությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. И. Бурштейн*, „Сообщения АН Груз. ССР", 84, № 1 (1976). [2] *C. Berge*, Graphes et hypergraphes, Paris, Dunod, 1970. [3] *А. А. Зыков*, УМН, 6, 1974. [4] *М. И. Бурштейн*, „Сообщения АН Груз. ССР", 75, №1 (1974).