ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 1

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

С. М. Нариманян

О равномерной распределенности случайных блужданий на топологических группах

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 28/III 1979)

Пусть G—локально компактная группа, μ—левоинвариантная мера Хаара на G, а X_n—однородная марковская цепь на G с переходной функцией $P(n,x,\Gamma)=P_x\{X_n\in\Gamma\}$. Мы предполагаем, что переходная функция $P(1,x,\Gamma)$ абсолютно непрерывна относительно меры μ (как функция Γ), и через $p(x,y)$ обозначим соответствующую плотность. Если переходная плотность инвариантна (слева), т. е. $p(x,y)=$ $=p(e,x^{-1}y)$, e—единица группы, то говорят, что X_n представляет случайное блуждание на G. Дадим некоторые необходимые для дальнейшего определения, предполагая, что для некоторого n_0 переходная плотность $p(n_0,x,y,)$ за n_0 шагов непрерывна.

Определение 1. Марковская цепь X_n на G называется связной и непериодичной, если для любых $x,y\in G$ существует номер $m_0=$ $=m_0(x,y)\geqslant n_0$, такой, что $p(m,x,y)>0$ при $m\geqslant m_0$.

Определение 2. Пусть К—класс компактных подмножеств K группы G, таких, что $\mu(K)>0$. Мы скажем, что случайное блуждание X_n равномерно распределено на G, если для любых $K_1,K_2\in$ К

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n,e,K_1)}{P(n,e,K_2)}=\frac{\mu(K_1)}{\mu(K_2)}.$$

В работе ([1]) Аве доказал теорему о равномерной распределенности симметрических случайных блужданий на широком классе дискретных (счетных) групп. Цель нашей статьи—перенести результат Аве на случай локально компактных топологических групп. Применяемая при этом техника имеет ряд особенностей.

Предложение 1. Пусть X_n связное и непериодическое случайное блуждание на G с переходной плотностью $p(e,x)=p(x)$. Если $p\in L^2(G,d\mu)$, то для любого $K\in$ К существует

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P(n,x,K)} = \rho$$

равномерно по x на каждом компакте и не зависит от K. Постоянное ρ называется спектральным радиусом случайного блуждания X_n.

Это предложение доказывается стандартными методами теории цепей Маркова с использованием операции урезания. Близкий результат см. в ([2]).

Теперь перейдем к сформулированию основного результата этой статьи. Мы будем предполагать, что рассматриваемое случайное блуждание X_n (с переходной плотностью $p(x)$) на G симметрично. Это означает, что $p(x) = p(x^{-1})$.

Теорема 1. *Пусть X_n—симметрическое связное и непериодическое случайное блуждание на G с переходной плотностью $p \in L^2(G)$. Тогда если спектральный радиус $\rho=1$, то X_n равномерно распределено на G*, т. е. *для любых $K_1, K_2 \in$* K

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n,e,K_1)}{P(n,e,K_2)} = \frac{\mu(K_1)}{\mu(K_2)} \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1 требует ряда вспомогательных предложений.

Лемма 1. Для любого $x \in G$

$$p(2n,e,x) \leq p(2n,e,e). \tag{2}$$

В самом деле, воспользовавшись уравнением Колмогорова — Чепмена, инвариантностью и симметричностью переходной плотности, а также неравенством Коши — Буняковского, будем иметь

$$p(2n,e,x) = \int p(n,e,y)\, p(n,e,x^{-1}y)\, d\mu(y) \leq \left(\int p^2(n,e,y)\, d\mu(y)\right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left(\int p^2(n,e,x^{-1}y)\, d\mu(y)\right)^{1/2} = \int p^2(n,e,y)\, d\mu(y),$$

откуда в силу равенства

$$p(2n,e,e) = \int p(n,e,y)\, p(n,y,e)\, d\mu(y) = \int p^2(n,e,y)\, d\mu(y)$$

немедленно получим (2).

Лемма 2. Существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(2n+2,e,e)}{p(2n,e,e)} = 1.$$

Доказательство. Существование предела доказывается точно так же, как и в ([1]). При доказательстве основную роль играет неравенство (2), с помощью которого показывается, что отношение $\dfrac{p(2n+2,e,e)}{p(2n,e,e)} \leq 1$ и монотонно возрастает по n. Покажем, что $\sqrt[2n]{p(2n,e,e)} \to 1$ при $n \to \infty$, и тем самым лемма 2 будет доказана.

Действительно, по условию теоремы 1

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{P(2n, e, K)} = 1$$

для любого $K \in \mathrm{K}$, и поскольку (в силу леммы 1) $P(2n, e, K) \leqslant \leqslant p(2n, e, e)\mu(K)$, то $\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[2n]{p(2n, e, e)} \geqslant 1$. Сопоставляя с неравенством $\dfrac{p(2n+2, e, e)}{p(2n, e, e)} \leqslant 1$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{p(2n, e, e)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p(2n+2, e, e)}{p(2n, e, e)} = 1.$$

Лемма 3. Семейство функций

$$f_n(x) = \frac{p(2n, e, x)}{p(2n, e, e)}, x \in G$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство. Равномерная ограниченность немедленно следует из леммы 1. Далее, из лемм 1 и 2 имеем

$$|f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)| \leqslant \int \frac{p(2n, e, z)}{p(2n+2, e, e)} \left| p(2, z, x) - p(2, z, y) \right| d\mu(z) \leqslant$$

$$\leqslant c \int \left| p(2, e, z^{-1}x) - p(2, z^{-1}y) \right| d\mu(z). \tag{3}$$

Известно ([3]), что если $\varphi \in L^p (p \geqslant 1)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность единицы V, что из $s \in V$ следует $\left(\int \left| \varphi(s^{-1}x) - \varphi(x) \right|^p \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon$. Учитывая, что $p(2, e, x) \in L^1(G)$, из (3) получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность единицы V такая, что при $y^{-1}x \in V$

$$\left| f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y) \right| < \varepsilon, \ x, y \in G.$$

Это и означает, что семейство функций f_n равностепенно непрерывно. Лемма 3 доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 1. Сначала покажем, что

$$\frac{p(2n, e, x)}{p(2n, e, e)} \to 1, \ n \to \infty \tag{4}$$

равномерно на каждом $K \in \mathrm{K}$.

Действительно, рассмотрим функции $f_n(x)$ на K. В силу теоремы

Арцела множество предельных точек семейства $\{f_n\}$ в $C(K)$ не пусто, и пусть g — какая-то предельная точка. Покажем, что $g(x)\equiv 1$ на K, и тем самым будет доказано (4). Пусть $f_{n'}\to g$ равномерно на K. В силу связности и непериодичности X_n и непрерывности $p(n, e, x)$, $n\geq 2$ можно выбрать l так, чтобы $p(2l, e, x)>0$ для всех $x\in K$. Поэтому из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости имеем

$$\int\limits_K (1-g(x))\,d\mu(x)=\lim_{n'\to\infty}\int\limits_K\left(1-\frac{p(2n', e, x)}{p(2n', e, e)}\right)d\mu(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta}\lim_{n'\to\infty}\int\limits_K p(2l, e, x)\left(1-\frac{p(2n', e, x)}{p(2n', e, e)}\right)d\mu(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta}\lim_{n'\to\infty}\left(1-\frac{p(2n'+2l, e, x)}{p(2n', e, e)}\right),$$

где $\delta=\min\limits_{x\in K} p(2l, e, x)$. Но правая часть последнего соотношения в силу леммы 2 равна нулю. Значит

$$\int\limits_K (1-g(x))\,d\mu(x)=0,$$

и, следовательно, $\mu\{x\in K: 1-g(x)>0\}=0$. Отсюда, учитывая непрерывность функции $g(x)$, получим, что $g(x)\equiv 1$ на K. Таким образом соотношение (4) доказано.

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, покажем еще, что равномерно по $x\in K$

$$\frac{p(2n+1, e, x)}{p(2n+1, e, e)}\to 1,\quad n\to\infty, \tag{5}$$

для чего достаточно доказать, что

$$g_n(x)=\frac{p(2n+1, e, x)}{p(2n, e, e)}\to 1,\quad n\to\infty \tag{6}$$

равномерно по $x\in K$.

Из очевидного представления

$$g_n(x)=\int p(e, z)\,\frac{p(2n, e, z^{-1}x)}{p(2n, e, e)}\,d\mu(z)=$$

$$=\int p(e, z^{-1}x)\,\frac{p(2n, e, z)}{p(2n, e, e)}\,d\mu(z)$$

и из леммы 1 немедленно следует компактность семейства функций $g_n(x)$. Повторяя все предыдущие рассуждения, относящиеся к последовательности f_n (только l выбирается так, чтобы $p(2l+1, e, x)>0$, $x\in K$), получим (6). Объединяя (4) — (5), получаем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(n, e, x)}{p(n, e, e)} = 1 \tag{7}$$

равномерно по $x \in K$, $K \in \mathrm{K}$. Отсюда и из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости сразу получим соотношение (1). Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Теорема Аве, упомянутая выше, утверждает также равномерную распределенность симметрического связного и непериодического случайного блуждания на счетной группе с дискретной топологией, в предположении, что спектральный радиус $\rho=1$. Другими словами, теорема 1 обобщает теорему Аве на гораздо более широкий класс непрерывных групп. Однако в дискретном случае теорема о равномерной распределенности допускает другую изящную формулировку. Именно, условие $\rho=1$ в этом случае, согласно результату Кестена, эквивалентно аменабельности группы (определение см. ([4])). Мы не знаем, справедлив ли аналог теоремы Кестена в непрерывном случае. Если это так, что представляется весьма правдоподобным, то и в теореме 1 условие $\rho=1$ можно будет заменить условием аменабельности группы G.

В заключение приношу глубокую благодарность С. А. Молчанову за руководство работой.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Ս. Մ. ՆԱՐԻՄԱՆՅԱՆ

Տոպոլոգիական խմբերի վրա տրված պատահական թափառումների հավասարաչափ բաշխվածության մասին

Դիցուք G-ն լոկալ կոմպակտ խումբ է, μ-ն ձախ ինվարիանտ Հաարի չափն է G-ի վրա, իսկ X_n-ը սիմետրիկ, կապակցված և ոչ պարբերական պատահական թափառում է G-ի վրա, որի անցման ֆունկցիան է՝ $P(n, x, \Gamma) = P_x\{X_n \in \Gamma\}$։ Ենթադրվում է, որ $P(1, x, \Gamma)$-ն բացարձակ անընդհատ է/որպես ֆունկցիա Γ-ից/μ չափի նկատմամբ և համապատասխան խտությունը նշանակվում է $p(x, y)$-ով։

Ստացված է հետևյալ արդյունքը։ Եթե X_n-ի սպեկտրալ շառավիղը հավասար է մեկի, իսկ $p(e, x) = p(x) \in L^2(G, d\mu)$, ապա X_n-ը հավասարաչափ է բաշխված G-ի վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. Avez*, Comptes Rendus, 276, №4, (1973). [2] *С. М. Нариманян*, Вестник МГУ, Матем., №6, 1975. [3] *А. Вейль*, Интегрирование в топологических группах и его применении, Изд. иностр. лит., М., 1950. [4] *Ф. Гринлиф*, Инвариантные средние на топологических группах и их приложения, "Мир", М., 1973.