ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXIX 1979 1

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Г. М. Бродский, А. Г. Григорян

О кольцах эндоморфизмов модулей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 18/III 1979)

Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и, если не оговорено противное, правые унитарные модули; гомоморфизмы записываются слева от элемента. Список обозначений: $r(S)$ и $l(S)$ — правый и левый аннуляторы подмножества S некоторого кольца; $L_r(X)$ и $L_r^f(X)$ (соответственно $L_l(X)$ и $L_l^f(X)$) — множества всех и всех конечно порожденных подмодулей правого (левого) модуля X соответственно; $\sigma(X)$ — наименьшая бесконечная мощность ω, для которой модуль X будет ω-связанным ([1]); $E(X)$—кольцо эндоморфизмов модуля X; $\mathrm{Im}\, S = \sum_{\varphi\in S} \mathrm{Im}\,\varphi$ для подмножества $S\subseteq E(X)$; $\overline{K}=\bigcap\{Ker\,\varphi \mid \varphi\in E(X),\ K\subseteq Ker\,\varphi\}$, $\delta_1(K)=K$ и $\delta_2(K)=\overline{K}$ для всех $K\in L_r(X)$; i—одно из двух чисел: 1,2. Класс b_R модулей над кольцом R называется *абстрактным*, если $X\in b_R$ и $X\simeq Y$ влечет $Y\in b_R$. Если a и b—функции, сопоставляющие каждому кольцу R некоторое множество a_R его правых идеалов и некоторый (абстрактный) класс b_R модулей над R соответственно, то скажем, что a и b являются *свойством правых идеалов* и (*абстрактным*) *свойством модулей* соответственно. При этом если c—свойство правых идеалов (модулей) и $X\in c_R$, то условимся говорить, что правый идеал (модуль) X *обладает свойством* c, и писать $c_R(X)$. Классы $\boldsymbol{M}_R$, $\boldsymbol{IP}_R$, $\boldsymbol{T}_R$, $\boldsymbol{P}_R$, $\boldsymbol{FT}_R$, $\boldsymbol{W}_R$, $\boldsymbol{F}_R$ и $\boldsymbol{F}^\infty_R$ всех, всех внутренне проективных ([2]), всех не имеющих кручения в смысле Басса, всех проективных, всех точных без кручения в смысле Басса, всех внутренне проективных образующих без кручения в смысле Басса, всех свободных и всех свободных, имеющих бесконечный ранг R-модулей определяют абстрактные свойства модулей $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{IP}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{FT}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}^\infty$ соответственно. Если $\boldsymbol{K}$—свойство модулей, то пару (a, b), где a—свойство правых идеалов, а b—абстрактное свойство модулей, назовем (*частичной*) *h-парой i-го рода для* $\boldsymbol{K}$, если для любых кольца R, модуля $U\in \boldsymbol{K}_R$ и (конечно порожденного) правого идеала I кольца $E(U)$ имеет место:

$$a_{E(U)}(I) \leftrightarrow b_R(U/\delta_I(Im\, I))$$

Теорема 1. *Если* $\boldsymbol{K}$ — *такое свойство модулей, что* $F^f_R \subseteq \boldsymbol{K}_R$ *для всякого кольца* R *и* (a, b) — *частичная* h - *пара первого рода для* $\boldsymbol{K}$, *то следующие условия равносильны:* 1) *в кольце эндоморфизмов любого модуля из* $\boldsymbol{K}_R$ *все конечно порожденные правые идеалы обладают свойством* a; 2) *в кольце эндоморфизмов любого свободного* R - *модуля достаточно большого ранга все главные правые идеалы обладают свойством* a; 3) *все* R - *модули обладают свойством* b. *Если, более того,* (a,b) *есть* h-*пара первого рода для* $\boldsymbol{K}$, *то этим условиям равносильно* 4) *в кольце эндоморфизмов любого модуля из* $\boldsymbol{K}_R$ *все правые идеалы обладают свойством* a.

Теорема 2. *Если* $\boldsymbol{K}$ — *такое свойство модулей, что* $F^\infty_R \subseteq \boldsymbol{K}_R \subseteq T_R$ *для всякого кольца* R *и* (a,b) — *частичная* h-*пара второго рода для* $\boldsymbol{K}$, *то следующие условия равносильны:* 1) *в кольце эндоморфизмов любого модуля из* $\boldsymbol{K}_R$ *все конечно порожденные правые идеалы обладают свойством* a; 2) *в кольце эндоморфизмов любого свободного* R - *модуля достаточно большого ранга все главные правые идеалы обладают свойством* a; 3) *все* R - *модули без кручения в смысле Басса обладают свойством* b. *Если, более того,* (a, b) *есть* h - *пара второго рода для* $\boldsymbol{K}$, *то этим условиям равносильно* 4) *в кольце эндоморфизмов любого модуля из* $\boldsymbol{K}_R$ *все правые идеалы обладают свойством* a.

Пусть заданы свойство модулей $\boldsymbol{K}$ и свойство правых идеалов a, причем $F^\infty_R \subseteq \boldsymbol{K}_R \subseteq T_R$ для всякого кольца R и поставлена задача описания таких колец R, что в кольце эндоморфизмов любого модуля из $\boldsymbol{K}_R$ все (все конечно порожденные) правые идеалы обладают свойством a. Схема применения теорем 1 и 2 к ее решению такова: для произвольного кольца R составляем два класса R - модулей $b^{(i)}_R = \{U/\delta_i(\mathrm{Im}\, I) \mid U \in \boldsymbol{K}_R, I \in L_r(E(U))$ (соответственно $I \in L^f_r(E(U)))$, $a_{E(U)}(I)\}$, отвечающих двум различным значениям i. Если хотя бы для одного значения $i = i_0$ удается подобрать такое абстрактное свойство модулей $\bar{b}^{(i_0)}$, что

$$b^{(i_0)}_R(U/\delta_{i_0}(\mathrm{Im}\, I)) \Leftrightarrow \bar{b}^{(i_0)}_R(U/\delta_{i_0}(\mathrm{Im}\, I))$$

для всех $U \in \boldsymbol{K}_R$, $I \in L_r(E(U))$ (соответственно $I \in L^f_r(E(U)))$, то $(a, \bar{b}^{(i_0)})$ — (частичная) h - пара i_0 - го рода, и остается применить теорему i_0. Если заданное свойство модулей $\boldsymbol{K}$ для всякого кольца R удовлетворяет лишь более слабому условию $F^f_R \subseteq \boldsymbol{K}_R$, то, разумеется, следует пытаться применить только теорему 1.

Определим свойства правых идеалов a^j и абстрактные свойства модулей b^j $(j = 1, 2, \ldots, 8)$, положив

$$a^1_R = \{R\},\ a^2_R = \{eR \mid e^2 = e \in R\},\ a^3_R = \{r(J) \mid J \in L_l(R)\},$$

$$a^4_R = \{r(J) \mid J \in L^f_l(R)\},\ a^5_R = a^7_R\{I \mid l(I) = 0\},$$

$$a^6_R = \{I \mid e \in l(I) \text{ для некоторого } 0 \neq e = e^2 \in R\},$$

$a^8_R = \{I \mid l(I) = Re$ для некоторого $e = e^2 \in R\}$.

$b^1_R = b^7_R = \{0\}$, $b^2_R = b^8_R = P_R$, $b^3_R = T_R$,

$b^4_R = \{X \mid X$ вкладывается в свободный модуль ранга $\rho(X)\}$.

$b^5_R = \{X \mid \mathrm{Hom}_R(X, R) = 0\}$, $b^6_R = \{X \mid 0 \neq X/K \in P_R$ для некоторого $k \in L_r(X)\}$.

Предложение 1. (a^1, b^1), (a^2, b^2), (a^3, b^3) *и* (a^4, b^1) — *частичные* h*-пары первого рода для* **IP**, **IP**, **W** *и* F° *соответственно*, (a^5, b^5) *и* (a^6, b^6), *есть* h*-пары первого рода для* **FT** *и* **P** *соответственно*; (a^6, b^6), (a^7, b^7) и (a^8, b^8) *есть* h*- пары второго рода для* **P**, **M** *и* **P** *соответственно.*

Кольцо R называется *левым* S*-кольцом*, если $R \neq I \in L_r(R)$ влечет $l(I) \neq 0$. Назовем R-модуль X *микроинъективным*, если $\mathrm{Hom}_R(Y, X) \neq 0$ для всякого подмодуля $Y \neq 0$ инъективной оболочки модуля X. Кольцо R назовем *самомикроинъективным* (*тестовым*) *справа*, если модуль R_R микроинъективный (тестовый ([3])).

Среди следствий теорем 1 и 2 и предложения 1 — не только известные результаты, например, теоремы 1 и 4 из ([4]), теорема 2 из ([5]), теорема 2 из ([6]), теоремы 3.7 и 3.8 из ([7]), но и ряд новых.

Теорема 3. *Следующие свойства кольца* R *равносильны:* 1) *в кольце эндоморфизмов любого проективного* R*- модуля левый аннулятор всякого собственного конечно порожденного правого идеала содержит ненулевой идемпотент;* 2) *в кольце эндоморфизмов любого свободного* R *- модуля левый аннулятор всякого необратимого справа элемента содержит ненулевой идемпотент;* 3) R *классически полупросто.*

Теорема 4. *Следующие свойства кольца* R *равносильны.* 1) *в кольце эндоморфизмов любого проективного* R *- модуля всякий ненулевой левый аннулятор содгржит ненулевой идемпотент,* 2) *в кольце эндоморфизмов любого свободного* R*-модуля всякий ненулевой левый аннулятор элемента содержит ненулевой идемпотент;* 3) *в кольце* R *всякий ненулевой правый идеал имеетненулевое проективное прямое слагаемое (как* R*-модуль).*

Теорема 5. *Следующие свойства кольца* R *равносильны:* 1)*в кольце эндоморфизмов любого внутренне проективного точного* R*- модуля без кручения в смысле Басса всякий собственный конечно порожденный правый идеал имеет ненулевой левый аннулятор;* 2) *в кольце эндоморфизмов любого свободного* R *- модуля всякий правый неделитель нуля имеет правый обратный;* 3) R *тестовое справа;* 4) R *самомикроинъективное справа левое* S*- кольцо* (*ср.* ([8]), *теорема* 2; ([9]), *предложение* 3).

В связи с теоремой 5 интересна также полученная методом, предложенным в работах ([7]), ([10]),

Теорема 6. *Следующие свойства кольца* R *равносильны:* 1) *кольцо эндоморфизмов любого (некоторого) проективного обра-*

зующего R-модуля самомикроинъективно справа; 2) *R самомикроинъективно справа.*

Как известно ([11]), ни над каким кольцом R все кольца эндоморфизмов проективных образующих не могут быть левыми S-кольцами и, тем более, тестовыми справа. Теоремы 5 и 6 показывают, в какой степени свойство кольца быть тестовым справа наследуется кольцами эндоморфизмов проективных образующих над ним.

Ярославский государственный университет
Вычислительный центр Госплана Армянской ССР

Գ. Մ. ԲՐՈԴՍԿԻ, Ա. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Մոդուլների էնդոմորֆիզմների օղակների մասին

Առաջարկված է նոր մեթոդ, որը թույլ է տալիս բնութագրել օղակների զանազան դասեր ազատ, պրոյեկտիվ և որոշ այլ մոդուլների էնդոմորֆիզմների օղակների հատկությունների միջոցով։ Որպես հետևություններ ստացված են ինչպես նախկինում հայտնի թեորեմներ, այնպես էլ մի շարք նոր արդյունքներ։ Մասնավորապես վերոհիշյալ ձևով բնութագրվում են՝ 1) դասական կիսապարզ օղակները, 2) այնպիսի R օղակները, որոնց յուրաքանչյուր ոչզրոյական աջ իդեալը պարունակում է ոչզրոյական պրոյեկտիվ ուղիղ գումարելի (որպես R-մոդուլ) և 3) աջ տեստային օղակները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Lenzing*, Math. Z., 114, № 3 (1970). [2] *Г. М. Бродский*, Матем. зам., 16, № 6 (1974). [3] *T. Cheatham, R. Cumbie*, Proc. Amer. Math. Soc., 49, № 2 (1975). [4] *Г. М. Цукерман*, Сиб. матем. журн. 7, № 5 (1966). [5] *В. Стефенсон, Г. М. Цукерман*, Сиб. матем. журн, 11, № 1 (1970). [6] *Г. М. Бродский*, Матем. зам., 14, № 4 (1973) [7] *Г. М. Бродский*, Матем. сб., 94, № 6 (1974) [8] *Г. М. Бродский*, Матем. сб., 88, № 1, (1972) [9] *T. Kato*, Tôhoku Math. J., 20, № 2 (1968). [10] *Г. М. Бродский*, Вестн. Моск. ун-та, матем.-мех., № 3, 106 (1974) [11] *Т. С. Тольская*, Матем. зам., 10, № 6 (1971).