ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 1

МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

А. А. Китбалян

Об одном обобщении ядра Фейера

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/II 1979)

В работе ([1]) впервые был изучен вопрос об обычной сходимости рядов Фурье по системе ортогональных рациональных функций. В ней было построено компактное обобщение ядра Дирихле для системы рациональных функций, ортогональных на единичной окружности, а также были получены аналоги признаков Жордана-Дирихле и Дини-Липшица для разложений в ряд Фурье по рациональным функциям.

В статье ([2]) была построена система рациональных функций, обобщающая классическую тригонометрическую систему, и были исследованы разложения по этой системе в ряды типа Фурье.

В настоящей заметке строится аналог классического ядра Фейера для некоторой системы рациональных функций и приводится теорема об аппроксимации функций, непрерывных на единичной окружности, рациональными функциями, образованными посредством ядер такого рода.

1°. Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в единичном круге: $|\alpha_k|<1$ $(k=1, 2, \ldots)$. Ассоциируем с ней систему рациональных функций $\{\pi_n(z)\}_0^\infty$ следующим образом:

$$\pi_0(z)\equiv 1,$$

$$\pi_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{1-\bar{\alpha}_k}{1-\alpha_k}\ (n=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Функции $\pi_n(z)$ аналитичны в замкнутом единичном круге $|z|\leqslant 1$ и имеют полюсы вне него в точках $z_k=1/\bar{\alpha}_k$ $(k=1, 2, \ldots n)$.

Легко заметить, что на единичной окружности $z=e^{ix}$ $(0\leqslant x<2\pi)$ функции $\pi_n(z)$ обладают следующими свойствами:

а) $|\pi_n(e^{ix})|=1$

б) $\pi_n(1)=1$

в) $[\pi_n(e^{ix})]^{-1}=\overline{\pi_n(e^{ix})}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. (2)

В частном случае, при $\alpha_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) система функций $\{\pi_n(z)\}_0^\infty$ переходит в классическую степенную систему $\{z^n\}_0^\infty$.

2°. В классическом случае ядро Фейера $K_n(u)$ выражается посредством ядра Дирихле $D_n(u)$ по формуле (см., например, [3], стр. 138)

$$K_{n-1}(u) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(u).$$

В частности, на единичной окружности $|z| = 1$ с выколотой точкой $z = 1$

$$D_n(z) = \sum_{j=-n}^{n} z^j = \frac{1}{1-z} \left(\frac{1}{z^n} - z^{n+1} \right) n = 0, 1, 2, \ldots$$

и, соответственно,

$$K_{n-1}(z) = \frac{z}{n(1-z)^2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} - 2 \right), \tag{3}$$

где $z = e^{ix}$ $(0 < x < 2\pi)$, $n = 1, 2, \ldots$.

Следуя приведенной схеме, аналогично формуле (3) введем в рассмотрение систему функций $\{\Phi_n(\zeta)\}_1^\infty$:

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{\zeta}{R_n(1-\zeta)^2} \left[\pi_n(\zeta) + \frac{1}{\pi_n(\zeta)} - 2 \right], \tag{4}$$

где величина R_n будет определена ниже.

Каждая функция $\Phi_n(\zeta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является рациональной функцией в комплексной плоскости ζ с полюсами в точках $\zeta = \alpha_k$ и $\zeta = 1/\bar{\alpha}_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$.

Отметим, что выражение

$$\omega_n(\zeta) = \pi_n(\zeta) + \frac{1}{\pi_n(\zeta)} - 2$$

без остатка делится на $(1-\zeta)^2$. В самом деле, так как

$$\omega_n'(\zeta) = \pi_n'(\zeta) \left[1 - \frac{1}{\pi_n^2(\zeta)} \right],$$

то с учетом свойства (2) б) имеем:

$$\omega_n(1) = \omega_n'(1) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это значит, что точка $\zeta = 1$ является устранимой особой точкой функции $\Phi_n(\zeta)$, иначе говоря, функцию $\Phi_n(\zeta)$ можно так доопределить в точке $\zeta = 1$, чтобы она стала непрерывной на всей единичной окружности $|\zeta| = 1$.

Упростим выражение для $\Phi_n(\zeta)$ на единичной окружности. Пусть $\zeta = e^{i\theta}$ $(0 < |\theta| \leq \pi)$, тогда с учетом свойств (2) функций $\pi_n(e^{i\theta})$ получим:

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}}{R_n(1-e^{i\theta})^2}\left| \pi_n(e^{i\theta}) + \frac{1}{\pi_n(e^{i\theta})} - 2 \right| =$$

$$= \frac{\sin^2 \frac{\varphi_n(\theta)}{2}}{R_n \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \tag{5}$$

где $\varphi_n(\theta) = \arg \pi_n(e^{i\theta})$.

Вычислим $\varphi_n(\theta)$. Пусть $\alpha_k = |\alpha_k| e^{i\psi_k}$, тогда легко видеть, что

$$\frac{e^{i\theta} - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k e^{i\theta}} \cdot \frac{1 - \bar{\alpha}_k}{1 - \alpha_k} = \exp\left(i \left(2\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\theta - |\alpha_k|\sin\psi_k}{\cos\theta - |\alpha_k|\cos\psi_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\operatorname{arc\,tg} \frac{|\alpha_k|\sin\psi_k}{1 - |\alpha_k|\cos\psi_k} - \theta \right)\right). \tag{6}$$

Обозначим

$$y_k(\theta) = 2\operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\theta - |\alpha_k|\sin\psi_k}{\cos\theta - |\alpha_k|\cos\psi_k} + 2\operatorname{arc\,tg} \frac{|\alpha_k|\sin\psi_k}{1 - |\alpha_k|\cos\psi_k} - \theta$$

и заметим, что

$$y_k(0) = 0, \quad y_k'(\theta) = \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k|\cos(\theta - \psi_k) + |\alpha_k|^2}.$$

Тогда из (1) и (6) имеем:

$$\pi_n(\theta) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} y_k(\theta) \right) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \int_0^\theta y_k'(t)\,dt \right) =$$

$$= \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \int_0^\theta \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k|\cos(u - \psi_k) + |\alpha_k|^2}\,du \right).$$

Итак, функции $\varphi_n(\theta)$ и $\Phi_n(e^{i\theta})$ имеют следующий вид:

$$\varphi_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\theta \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - 2|\alpha_k|\cos(u - \psi_k) + |\alpha_k|^2}\,du, \tag{7}$$

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \int_0^\theta \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 - |2\alpha_k|\cos(u - \psi_k) + |\alpha_k|^2}\,du}{R_n \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \tag{8}$$

где $\psi_k = \arg \alpha_k$.

3°. Рассмотрим теперь функцию

$$\Phi_n(z, \zeta) \equiv \Phi_n\left(\frac{z}{\zeta}\right) = \frac{z\zeta}{R_n(\zeta - z)^2}\left[\pi_n\left(\frac{z}{\zeta}\right) + \pi_n^{-1}\left(\frac{z}{\zeta}\right) - 2\right], \tag{4'}$$

где $\zeta = e^{i\theta}$ $(0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi)$ — параметр. Полюсы этой функции лежат в точках $z_k = \alpha_k e^{i\theta}$ и $z_k = e^{i\theta}/\bar{\alpha}_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$.

Вычислим интеграл

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \Phi_n(z, \zeta)|d\zeta| \tag{9}$$

при $z = e^{ix}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. Обозначим $\max\limits_{1 < k < n} |\alpha_k| = r_n$.

Очевидно, что $r_n < 1$ и с учетом приведенного выше соображения относительно непрерывности функции $\Phi_n(\theta)$ на единичной окружности, можно утверждать, что функция $\Phi_n(z, \zeta)$ непрерывна в кольце $r_n < |z| < 1$. Поэтому при вычислении интеграла (9) будем считать, что z лежит в кольце $r_n < |z| < 1$. После замены переменной $z/\zeta = w$ интеграл (9) примет вид:

$$J_n(z) = -\frac{1}{2\pi i R_n}\int\limits_{|w|=r} \frac{\pi_n(w) + \pi_n^{-1}(w) - 2}{(1 - w)^2}\, dw, \tag{10}$$

где $r = |z|$, $r_n < r < 1$.

Так как функции $\pi_n(w)$ и $(1 - w)^{-2}$ аналитичны в замкнутом круге $|w| \leqslant r$, то из (10) имеем:

$$J_n(z) = -\frac{1}{2\pi i R_n}\int\limits_{|w|=r} \frac{dw}{(1-w)^2\pi_n(w)} = -\frac{1}{R_n}\lim_{w\to 1}\frac{d}{dw}\left[\frac{1}{\pi_n(w)}\right] =$$

$$= \frac{1}{R_n}\lim_{w\to 1}\frac{[\ln \pi_n(w)]'}{\pi_n(w)} = \frac{1}{R_n}\lim_{w\to 1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\log(w - \alpha_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \log(1 - \bar{\alpha}_k w)\right]'\right\} = \frac{1}{R_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1 - |\alpha_k|^2}{|1 - \alpha_k|^2}. \tag{11}$$

Из формулы (11) следует, что интеграл $J_n(z)$ не зависит от z и если в качестве множителя R_n выбрать частичные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1 - |\alpha_k|^2}{|1 - \alpha_k|^2} \tag{12}$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1 - |\alpha_k|^2}{|1 - \alpha_k|^2}, \tag{13}$$

то при таком выборе R_n будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \Phi_n(z, \zeta)|d\zeta| = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

при $z = e^{ix}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

В частном случае, при $\tau_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots$), $R_n = n$, $\varphi_n(\theta) = n\theta$, а функция $\Phi_n(e^{i\theta})$ переходит в классическое ядро Фейера:

$$\Phi_n(e^{i\theta}) = \frac{\sin^2 \dfrac{n\theta}{2}}{n \sin^2 \dfrac{\theta}{2}}.$$

Сформулируем теперь лемму об основных свойствах функции $\Phi_n(\zeta)$.

Лемма. *Функция* $\Phi_n(\zeta)$, *введенная по формуле* (4), *на единичной окружности обладает всеми свойствами, присущими классическому ядру Фейера, а именно:*

а) $\Phi_n(e^{i\theta}) \geqslant 0$ при $0 < |\theta| \leqslant \pi$ ($n = 1, 2, \ldots$)

б) $$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \Phi_n(z, \zeta)\,|d\zeta| = 1 \text{ при } z = e^{ix}\ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi) \tag{15}$$

в) $\Phi_n(\theta) \leqslant \dfrac{\pi^2}{R_n \theta^2}$ при $0 < |\theta| \leqslant \pi$

г) *если дополнительно предположить, что ряд* (12) *расходится, то*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\delta} \Phi_n(z, \zeta)\,|d\zeta| = 1,$$

где для любого δ $(0 < \delta < \pi)$ γ_δ — *дуга единичной окружности* $\{|\zeta| = 1, -\delta < \arg \zeta < \delta\}$.

Доказательство. Как видно из (13), $R_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), поэтому свойство а) непосредственно следует из представления (8); свойство б) доказано выше (см. 14)).

Далее, в силу известной оценки $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$, имеем: $\sin^2 x \geqslant \dfrac{4}{\pi^2} x^2 \left(|x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ или $\dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{\theta}{2}} \leqslant \dfrac{\pi}{\theta^2}$ при $0 < |\theta| \leqslant \pi$. С учетом этого неравенства, из (8) получим свойство в) леммы:

$$\Phi_n(\theta) \leqslant \frac{1}{R_n \sin^2 \dfrac{\theta}{2}} \leqslant \frac{\pi^2}{R_n \theta^2} \qquad \text{при } 0 < |\theta| \leqslant \pi.$$

В частности, при $0 < \delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi$ отсюда следует:

$$\Phi_n(\theta) < \frac{\pi^2}{R_n \delta^2}$$

и если $R_n \to +\infty$, то при любом δ $(0 < \delta < \pi)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\max_{\delta<|\theta|<\pi}\Phi_n(\theta)=0. \qquad (16)$$

Непосредственно из свойства б) следует:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}\Phi_n(z,\zeta)\,|d\zeta|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\delta}\Phi_n(z,\zeta)|d\zeta|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|\arg\zeta|<\pi}\Phi_n(z,\zeta)|d\zeta|\right]=1,$$

откуда, ввиду (16), вытекает свойство г) леммы.

4°. Докажем наконец теорему об аппроксимации.

Допустим, что функция $f(z)$ непрерывна на единичной окружности, и введем в рассмотрение систему рациональных функций $\{f_n(z)\}_1^\infty$:

$$f_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\Phi_n(z,\zeta)|d\zeta| \ (n=1,2,\ldots). \qquad (17)$$

Теорема. *Если ряд* (12) *расходится, то для любой функции $f(z)$, непрерывной на единичной окружности, последовательность рациональных функций $\{f_n(z)\}_1^\infty$, определенная по формуле* (17), *сходится к $f(z)$ равномерно на единичной окружности:*

$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=f(z).$$

Доказательство. В силу свойства (15) б) и по (17) имеем

$$f(z)-f_n(z)=\int_{|\zeta|=1}[f(z)-f(\zeta)]\Phi_n(z,\zeta)|d\zeta|. \qquad (18)$$

Далее, в силу непрерывности $f(z)$ на единичной окружности, для произвольного $\varepsilon>0$ выберем такое $\delta>0$, что при $|\arg z-\arg\zeta|<\delta$ имеем $|f(z)-f(\zeta)|<\varepsilon$ равномерно на всей единичной окружности. Обозначим также

$$\sup_{|z|=1}|f(z)|=M$$

и с учетом свойства (15) а) оценим интеграл (18), предварительно разбив его на два интеграла:

$$|f(z)-f_n(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\delta}|f(z)-f(\zeta)|\Phi_n(z,\zeta)|d\zeta|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|\arg\zeta|<\pi}|f(z)-f(\zeta)|\Phi_n(z,\zeta)|d\zeta|<\varepsilon\int_{\gamma_\delta}\Phi_n(z,\zeta)|d\zeta|+$$

$$+2M\int\limits_{\delta<|\arg\zeta|<\pi} \Phi_n(z, \zeta)|d\zeta|.$$

Наконец, ввиду свойств (15) в) и г) ядра $\Phi_n(z, \zeta)$ отсюда получим

$$|f(z)-f_n(z)|<C\varepsilon$$

равномерно на всей окружности ($C = \mathrm{const}$).

Теорема доказана.

Таким образом, возможность равномерной аппроксимации непрерывных на единичной окружности функций системой рациональных функций, образованных обобщенным ядром Фейера $\Phi_n(z, \zeta)$, существенно зависит от скорости сгущения точек последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ к единичной окружности.

Следует также отметить, что полюсы рациональных функций $f_n(z)$ в общем случае не совпадают с полюсами ядра $\Phi_n(\zeta)$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԿԻՏԲԱԼՅԱՆ

Ֆեյերի կորիզի մի ընդհանրացման մասին

Հոդվածում ([1]) առաջին անգամ ուսումնասիրվել էր ըստ ռացիոնալ ֆունկցիաների օրթոգոնալ համակարգի կառուցված Ֆուրյեի շարքերի սովորական զուգամիտության հարցը։ Այնտեղ կառուցվել էր Դիրիխլեի ընդհանրացված կորիզը միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգի համար, ապացուցվել էին Ժորդան—Դիրիխլեի և Դինի—Լիպշիցի հայտանիշների անալոգները։

Կառուցվել էր դասական եռանկյունաչափական համակարգն ընդհանրացնող ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգ և հետազոտվել էին Ֆուրյեի շարքերի վերլուծությունները ըստ այդ համակարգի([2])։

Ներկա հոդվածում կառուցվում է Ֆեյերի դասական կորիզի անալոգը ռացիոնալ ֆունկցիաների որոշ համակարգի համար և ապացուցվում է թեորեմ՝ նշված կորիզի միջոցով կառուցված ռացիոնալ ֆունկցիաներով միավոր շրջանագծի վրա անընդհատ ֆունկցիաների մոտարկման վերաբերյալ։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, „Известия АН Арм. ССР", серия физ.-мат. наук, т. 9, № 7 (1956). [2] *А. А. Китбалян*, „Известия АН Арм. ССР", серия физ.-мат. наук, т. 16, № 6 (1963). [3] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, М., 1961.