ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXIX 1979 1

УДК 519.1+517.55

МАТЕМАТИКА

Г. П. Егорычев

Семейство тождеств для перманента

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 26/I 1979)

Найдено семейство формул для вычисления перманента прямоугольной матрицы, которые при частных значениях параметров дают известные формулы типа включения-исключения Райзера и Вильфа. Прямое доказательство опирается на кратный интеграл Коши.

Определения и обозначения. Пусть $1\leqslant k\leqslant n\leqslant m$, $Q_{k,m}$ — множество всех строго возрастающих последовательностей $J_k=(j_1,\ldots,j_k)$, составленных из чисел $1,\ldots,m$; $G_{k,m}$ — множество всех k-выборок (без повторений) $J_k=(j_1,\ldots,j_k)$ из чисел $1,\ldots,m$; $F_{n,m}$ — множество $n\times m$ матриц над полем комплексных чисел. Последовательность $a_{1j_1},\ldots,a_{nj_n}$ называется диагональю матрицы $A=(a_{ij})\in F_{n,m}$, если $J_n=(j_1,\ldots,j_n)\in G_{n,m}$, $J_k^{(n)}=(1,2,\ldots,[j_1],\ldots,[j_k],\ldots,n)$, где $[\ldots]$ — знак пропуска. Под перманентом матрицы $A=(a_{ij})\in F_{n,m}$ понимается число

$$\operatorname{perm} A=\sum_{J_n\in G_{n,m}} a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть матрицы $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})\in F_{n,n}$ такие, что произведение элементов любой диагонали матрицы $B+C$ равно 1. Тогда, если $A=(a_{ij})\in F_{n,n}$, то*

$$\operatorname{perm} A=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{J_k\in Q_{k,n}}\left\{\prod_{r=1}^{n}\left(\sum_{j\in J_k^{n}} b_{rj}a_{rj}-\sum_{j\in J_k} c_{rj}a_{rj}\right)\right\}. \tag{2}$$

Теорема 1 может быть просто доказана путем подсчета коэффициентов при произведениях $a_{1j_1}\ldots a_{nj_n}$, $j_1,\ldots,j_n=\overline{1,n}$, получаемых при раскрытии скобок в правой части (2). Эти коэффициенты в силу условий теоремы равны 1 при каждом $J_n=(j_1,\ldots,j_n)\in G_{n,n}$ и равны 0 при $J_n\in G_{n,n}$. Заметим, однако, что в этом доказательстве мы исходим из знания ответа (2). В следующей теореме указывается прямой вывод формулы (5), эквивалентной формуле (2), в котором используется представление перманента в виде n - кратного контурного интеграла в C^n.

Теорема 2. *Пусть $B=(b_{ij})\in F_{n,n}$, а $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ i=\overline{1,n},$— произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию*

$$\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i=1. \tag{3}$$

Тогда, если $A=(a_{ij})\in F_{n,n}$, то справедливы формулы

$$\operatorname{perm} A=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{J_k\in Q_{k,n}}\Big\{\prod_{r=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}b_{rj}a_{rj}-\alpha_r\sum_{j\in J_k}\beta_j a_{rj}\Big)\Big\}; \tag{4}$$

$$\operatorname{perm} A=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{J_k\in Q_{k,n}}\Big\{\prod_{r=1}^{n}\Big(\gamma_r-\alpha_r\sum_{j\in J_k}\beta_j a_{rj}\Big)\Big\}. \tag{5}$$

Отметим, что формула (4) содержит n^2+2n-1, а формула (5) —$(3n-1)$ независимых переменных. В (2) при выборе B и C необходимо, чтобы произведение элементов любой диагонали матрицы $B+C$ равнялось 1. Покажем, что формулы (2), (4), (5) эквивалентны. Действительно, (4) следует из (5), если положить $\gamma_r=\sum\limits_{j=1}^{n}b_{rj}a_{rj}$. Докажем обратное. Если A содержит какую-либо нулевую строку, то (4) и (5) дают общее значение для perm A, равное 0. Если же какие-либо $a_{1j_1},\dots,a_{nj_n}$ отличны от нуля, то обозначая $\gamma_r=a_{rj_r}b_{rj_r}$, $r=\overline{1,n}$, в силу произвольности выбора $B\in F_{n,n}$ из (4) следует (5). Эквивалентность (2) и (4) устанавливается с помощью следующего простого рассуждения.

Лемма.* *Для того, чтобы матрица $D=(d_{ij})\in F_{n,m}$ имела равные отличные от нуля произведения элементов диагоналей, необходимо и достаточно, чтобы*

$$d_{ij}=\alpha_i\beta_j,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}, \tag{6}$$

где α_i, β_j— некоторые отличные от нуля комплексные числа.

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости приравняем произведения элементов двух диагоналей матрицы D, различающихся лишь элементами i_1, i_2 - строк и j_1, j_2 - столбцов. После сокращения общих сомножителей получаем, что для произвольных пар $i_1\neq i_2$, $j_1\neq j_2$ справедливы равенства $d_{i_1j_1}d_{i_2j_2}=d_{i_1j_2}d_{i_2j_1}$, т. е. ранг матрицы D равен 1. Отсюда следует (6).

Другое непосредственное доказательство формулы (5) (а с ней (2) и (4)) было первоначально получено автором с помощью подхода, развитого в ([3]), исходя из известного интегрального представления для перманента

$$\operatorname{perm} A=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma(\rho)}\Big\{\Big(\prod_{r=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{jr}w_j\Big)\Big)\Big/w_1^2\dots w_n^2\Big\}\,dw_1\wedge\dots\wedge dw_n, \tag{7}$$

* Это утверждение возникло в ходе обсуждения с А. М. Кытмановым.

где $\Gamma(\rho)$ — остов полидиска $U(\rho)=\{w=(w_1,\ldots,w_n)\in C^n_n;\ |w_j|\leq\rho_j,\ 0<\rho_j<\infty,\ j=\overline{1,n}\}$. Доказательство проводится путем некоторых преобразований числителя или знаменателя подынтегрального выражения в (7), не изменяющих величины интеграла (7), с дальнейшим его вычислением. Это оказалось возможным в силу того, что в числителе и знаменателе подынтегрального выражения в (7) стоят однородные многочлены от $w_1,\ldots,w_n$.

Тождество (5) (равно (2), (4)) допускает и другие доказательства, как требующие, так и не требующие знания ответа.

Следствие 1. *Пусть $A\in F_{n,n}$. Тогда для любого набора $I_s=(i_1,\ldots,i_s)\in Q_{s,n}$, $s=\overline{1,n-1}$, справедливы равенства*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{J_k\in Q_{k,n}}\left\{\prod_{r\in I_s}\left(\gamma_r-\alpha_r\sum_{l\in J_k}\beta_j a_{rj}\right)\right\}=0, \tag{8}$$

где $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$, $i=\overline{1,n}$ — произвольные комплексные числа. Если $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ — комплексные числа, удовлетворяющие условию (3), то для любых $s,t=\overline{1,n}$ справедливо тождество

$$\alpha_s\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{J_k\in Q_{k,n}}\left\{\sum_{l\in J_k}\beta_l a_{sl}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq s}}^{n}\left(\gamma_r-\alpha_r\sum_{l\in J_k}\beta_j a_{rj}\right)\right\}=$$

$$=\beta_t\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{J_k\in Q^{(t)}_{k,n}}\left\{\sum_{l=1}^{n}\alpha_l a_{lt}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq l}}^{n}\left(\gamma_r-\alpha_r\sum_{j\in J_k}\beta_j a_{rj}\right)\right\}, \tag{9}$$

где через $Q^{(t)}_{k,n}$ обозначено множество последовательностей $J_k=(j_1,\ldots,j_k)\in Q_{k,n}$, хотя бы один из членов которых равен t.

Докажем (8). Пусть S_{I_s} — выражение в левой части (8). Из (5) имеем $S_{I_s}=\operatorname{perm}A_{I_s}=0$, где A_{I_s} — матрица, получаемая из A заменой элементов всех строк, исключая $i_1,\ldots,i_s$-ую, нулями. Формула (8) может быть также получена путем дифференцирования (5) по всем γ_i, исключая $\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_s}$. Формула (9) получается из (5) путем рассмотрения полной частной производной по α_s и β_t.

Очевидно, тождества (8) равносильны тождеству (5). Используя этот факт, можно показать, что тождество (5) для перманента является некоторым аналогом известного полиномиального тождества для детерминанта: детерминант исходной матрицы равен детерминанту матрицы, получаемой из A добавлением к одной из ее строк произвольной линейной комбинации остальных $n-1$ строк.

Теорема 3. *Пусть $\alpha_i,\beta_j,\gamma_r$, $i,r=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$ — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию*

$$\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\prod_{j=1}^{m}\beta_j=1. \tag{10}$$

Тогда, если $A=(a_{ij})\in F_{n,m}$, то

$$\operatorname{perm} A = \sum_{k=m-n}^{m} (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} \sum_{J_k \in Q_{k,m}} \left\{ \prod_{r=1}^{n} \left(\gamma_r - \alpha_r \sum_{j \in J_k} \beta_j a_{rj} \right) \right\}. \qquad (11)$$

Доказательство. Пусть $D \in F_{m,m}$ — матрица вида

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nm} \\ 1 \dots 1 \\ \dots\dots \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы Лапласа для перманента, примененной к последним $m-n$ строкам матрицы D, следует, что $\operatorname{perm} A = \operatorname{perm} D / (m-n)!$, и вычисляя $\operatorname{perm} D$ из (5) при $\alpha_i = \beta_j = 1$, получим

$$\operatorname{perm} A = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(m-n)!} \prod_{r=n+1}^{m} (\gamma_r - k) \sum_{J_k \in Q_{k,m}} \left\{ \prod_{r=1}^{n} \left(\gamma_r - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j \in J_k} a_{rj} \right) \right\}. \qquad (12)$$

Отсюда, полагая $\gamma_{n+r} = r-1$, $r = \overline{1, m-n}$, получаем (11) (при $\alpha_i = \beta_j = 1$), замечая, что при этих значениях γ_i члены суммы в (12) при $k = \overline{0, m-n-1}$ обращаются в нуль. Для окончания доказательства при произвольных α_i и β_j, удовлетворяющих условию (10), достаточно заметить, что согласно определению перманента $\operatorname{perm}(a_{ij}) = \operatorname{perm}(\alpha_i \beta_j a_{ij})$.

Перенося выражения, стоящие в правых частях формул (2), (4), (5), (11), в левые части тех же соотношений, получаем соответствующие семейства тождеств для перманента. Придавая параметрам α_i, β_j, γ_r и членам матрицы B в указанных формулах конкретные значения, можно получать различные частные формулы для вычисления перманента. Например, при всех $\alpha_i = \beta_j = 1$ и $\gamma_r = \sum_{j=1}^{m} a_{rj}$, $r = \overline{1, n}$, (11) дает известную формулу Райзера ([1])

$$\operatorname{perm} A = \sum_{k=m-n}^{m} (-1)^{k-m+n} \binom{k}{m-n} \sum_{J_k \in Q_{k,m}} \left\{ \prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{rj} - \sum_{j \in J_k} a_{rj} \right) \right\},$$

а при всех $\alpha_i = \beta_j = 1$ и $\gamma_r = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{rj}$, $r = \overline{1, n}$, где каждое $\varepsilon_j = \pm 1$, либо каждое $\varepsilon_j = 1/2$, (5) переходит в формулы Вильфа ([2])

$$\operatorname{perm} A = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{J_k \in Q_{k,n}} \left\{ \prod_{r=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{rj} - \sum_{j \in J_k} a_{rj} \right) \right\}. \qquad (13)$$

Заметим, что в случае $\varepsilon_j = 1/2$, $j = \overline{1, n}$, после приведения подобных в правой части (13) эта формула содержит лишь 2^{n-1} членов суммы при нечетном n и $2^{n-1}+\binom{n}{[n/2]}/2$ членов при четном n.

Из (4) при всех $\alpha_i=\beta_i-1$ и $B=P$ вытекает

Теорема 4. *Пусть $P=(p_{ij})\in F_{n,n}$ — матрица перестановки, порожденная некоторой фиксированной перестановкой $(i_1,\ldots,i_n)$ чисел $1,\ldots,n$. Тогда, если $A\in F_{n,n}$, то*

$$\operatorname{perm} A=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\sum_{J_k\in Q_{k,n}}\left\{\prod_{r=1}^{n}\left(a_{ri_r}-\sum_{j\in J_k}a_{rj}\right)\right\}, \tag{14}$$

причем члены суммы в правой части (14) равны нулю при $k=1$.

Институт физики
им. Л. В. Киренского
СО АН СССР

Գ. Պ. ԵԳՈՐԻՉԵՎ

Նույնությունների ընտանիք պերմանենտի համար

Գտնված է ուղղանկյուն մատրիցայի պերմանենտի հաշվման համար բանաձևերի ընտանիք, որոնք պարամետրերի մասնավոր արժեքների դեպքում տալիս են ներառման-բացառման տիպի Ռայզերի և Վիլֆի հայտնի բանաձևերը։

Անմիջական ապացույցը ամբողջովին հենվում է Կոշու բազմաչափ ինտեգրալի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Дж. Райзер.* Комбинаторная математика, 152 с., „Мир", М., 1966. [2] *H. S. Wilf*, Journal of Combinatorial Theory, 4, № 3, 246—258 (1968). [3] *П. Г. Егорычев.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм, 286 с., „Наука", СО АН СССР, Новосибирск, 1977.