ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 5

УДК 01.006

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

О свойствах одного класса отображений подмножеств Гильбертова пространства

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 23/III 1979)

В настоящей статье проводится дальнейшее изучение введенного В. Г. Болтянским (1) класса Б непрерывных отображений подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H% (2 3). Построение и доказательства ряда основных свойств класса Б содержатся в (1). Сначала напомним определение этого класса.

Пусть G—произвольное открытое подмножество пространства H, а $f:G\to H$—непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу Б, если для любой точки $x_0\in G$ и для любого $\varepsilon>0$ существуют окрестность $U\subset G$ точки x_0, конечномерное подпространство $L\subset H$, действительные числа $\delta>0$ и ι такие, что если точки $x, y\in U$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\pi/2-\delta$, то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\iota(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\| \qquad (*)$$

Оказывается, что фигурирующие в этом определении числа ι порождают вещественную непрерывную функцию $\iota_f:G\to R$, однозначным образом определяемую самим отображением f и называемую его терминальной производной. Таким образом, через терминальную производную соотношение (*) записывается в виде $\|f(x)-f(y)-\iota_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|$.

Пусть теперь M произвольное бесконечномерное ($\dim M=\infty$) подмножество пространства H, а $f:M\to H$ непрерывное отображение. Мы скажем, что f принадлежит классу Б, если существуют такое открытое подмножество $G\subset H$ и такое отображение $g:G\to H$, принадлежащее классу Б, что $M\subset G$ и $f(x)=g(x)$ для каждой точки $x\in M$.

Одним из основных свойств $f:M\to H$ класса Б является локальное удовлетворение условию Липшица, т. е. для любой точки $x_0\in M$ существуют такие числа $r>0$ и $c>0$, что если $x, y\in M$ и $\|x-x_0\|<r$ и $\|y-x_0\|<r$, то $\|f(x)-f(y)\|\leqslant c\|x-y\|$.

Предложение 1. Пусть G открытое подмножество пространства H, а $f:G\to H$ отображение класса Б; пусть далее $x_0\in G$ такая точка, у которой существует окрестность $U \subset G$ такая, что $f(U) \subset X$, где подмножество X удовлетворяет одному из следующих условий:

I) X—конечномерно ($\dim X < +\infty$);

II) X—локально компактно (в частности, компактно).

Тогда терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f в точке x_0 равна нулю.

Следствие. Если G открыто в H, то для всякого конечномерного или вполне непрерывного отображения $f: G \to H$, принадлежащего классу Б, терминальная производная $\lambda_f(x)$ тождественно равна нулю на G.

Замечание. Предыдущие утверждения остаются справедливыми, если открытое подмножество пространства H заменить открытым подмножеством подпространства H_1 конечного дефекта пространства H.

Пусть теперь M—произвольное подпространство пространства H и $p: H \to M$—ортогональное проектирование. Тогда имеет место следующее утверждение:

Предложение 2. Отображение p принадлежит классу Б тогда и только тогда, когда подпространство M либо конечномерно, либо имеет конечный дефект в H.

Композиция двух отображений, принадлежащих классу Б, также принадлежит [1] этому классу. Приведем два утверждения относительно принадлежности к классу Б композиции двух отображений.

Предложение 3. Пусть G и G' открытые подмножества пространства H; $f: G \to G'$—отображение, принадлежащее классу Б, терминальная производная $\lambda_f(x)$ которого тождественно равна нулю на G. Тогда для любого непрерывного отображения $g: G' \to H$, локально удовлетворяющего условию Липшица, композиция $h = g \circ f: G \to H$ также принадлежит классу Б и терминальная производная $\lambda_h(x)$ отображения h равна тождественно нулю на G.

В силу этого предложения и из следствия к предложению 1, а также из того факта, что всякое линейное вполне непрерывное отображение $f: G \to H$ принадлежит классу Б, причем его терминальная производная $\lambda_f(x)$ тождественно равна нулю на G, приходим к следующему утверждению:

Следствие. Если $f: G \to G'$ линейное вполне непрерывное отображение, а непрерывное отображение $g: G' \to H$ локально удовлетворяет условию Липшица, то отображение $h = g \circ f: G \to H$ принадлежит классу Б.

Замечание. В предложении 3 условие $\lambda_f(x) \equiv 0$ на G не может быть опущено. В самом деле, пусть $f = 1_H: H \to H$—тождественное отображение (которое, очевидно, принадлежит классу Б, причем $\lambda_f(x) \equiv 1$ на H), а $g: H \to H$—ортогональное проектирование пространства H на бесконечномерное подпрансво M бесконечного дефекта в H. Тогда из предложения 2 следует, что отображение $g \circ f = g: H \to H$ не принадлежит классу Б.

Предложение 4. Пусть G и G' открытые подмножества пространства H, а $f:G\to G'$ и $g:G'\to H$ непрерывные отображения, удовлетворяющие условиям:

I) f локально удовлетворяет условию Липшица;

II) какова бы ни была точка $x_0\in G$, для всякой окрестности $U'\subset G'$ точки $f(x_0)$ и для конечномерного подпространства $L'\subset H$ существуют окрестность $U\subset G$ точки x_0 и конечномерное подпространство $L'\subset H$ существуют окрестность $U\subset G$ точки x_0 и конечномерное подпространство $L\subset H$ такие, что если $x, y\in U$ и вектор $(x-y)\perp L$, то $f(x), f(y)\in U'$ вектор $(f(x)-f(y))\perp L'$;

III) g принадлежит классу Б и $\lambda_g(x)=0$ на G'.

Тогда композиция $h=g\circ f:G\to H$ принадлежит классу Б, причем $\lambda_h(x)=0$ на G.

Следствие. Пусть $f:H\to H$ линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение. Тогда для любого отображения $g:H\to H$, принадлежащего классу Б и такого, что $\lambda_g(x)=0$ на H, отображение $h=g\circ f:H\to H$ принадлежит классу Б.

Замечание. Простые примеры показывают, что в предложении 4 условие $\lambda_g(x)=0$ на G' также не может быть опущено.

Перейдем теперь к рассмотрению замыкания $\overline{Б}$ класса Б.

Определение. Пусть G—произвольное открытое подмножество пространства H, а $f:G\to H$ некоторое непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит $\overline{Б}$, если существует последовательность (f_n) отображений $f_n:G\to H$, принадлежащих классу Б, равномерно (относительно каждого ограниченного подмножества $A\subseteq G$), сходящаяся ([3]) к отображению f, т. е. для всякого $\varepsilon>0$ и для всякого ограниченного подмножества $A\subseteq G$ существует такой номер n_0, что для всех $n\geqslant n_0$ выполняется соотношение $\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon$ для всех точек $x\in A$.

Если теперь M—произвольное бесконечномерное подмножество пространства H и $g:M\to H$—непрерывное отображение, то мы скажем, что g принадлежит Б, если существуют открытое подмножество $G\supseteq M$ из H и отображение $f:G\to H$ такие, что $f\in\overline{Б}$ и $f(x)=g(x)$ для каждой точки $x\in M$.

Пусть G открытое подмножество из H, а $f:G\to H$— произвольное отображение из класса $\overline{Б}$. Пусть далее (f_n)—некоторая последовательность отображений $f_n:G\to H$, принадлежащих классу Б, равномерно сходящаяся к f, и пусть $\lambda_n(x)=\lambda_{f_n}(x)$—терминальная производная отображения f_n. Рассмотрим произвольную точку x_0 множества G и некоторую ее ограниченную окрестность $A\subset G$. Зададим $\varepsilon>0$ произвольно; тогда существует n_0 такой, что для всех $n\geqslant n_0$ $\|f_n(x)-f(x)\|<\varepsilon/2$ для всех $x\in A$. Зафиксируем $n>n_0$, тогда из $f_n\in Б$ следует, что существуют окрестность $U_n\subset A$ точки x_0, конечномерное подпространство $L_n\subset H$ и число $\delta_n>0$ такие, что если $x, y\in U_n$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L_n не меньше $\pi/2-\delta_n$, то выполнено соотношение $\|f_n(x)-f_n(y)-\lambda_n(x_0)(x-$ $-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|$.

Для этих же точек x и y будем иметь $\|f(x)-f(y)-\lambda_n(x_0)(x-$ $-y)\|\leqslant\|f_n(x)-f_n(y)-\lambda_n(x_0)(x-y)\|+\|f_n(x)-f(x)\|+\|f_n(y)-f(y)\|\leqslant$ $\leqslant\varepsilon\|x-y\|+\varepsilon$.

Аналогичным образом для другого фиксированного $m>n_0$ будут существовать окрестность $U_m\subset A$ точки x_0, конечномерное подпространство $L_m\subset H$, число $\delta_m>0$ такие, что если $x, y\in U_m$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L_m не меньше $\pi/2-\delta_m$, то выполняется соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_m(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|+\varepsilon.$$

Пусть $U=U_m\cap U_n$, $\delta=\min(\delta_m, \delta_n)$ и L—линейная оболочка подпространства L_m и L_n. Тогда если точки $x, y\in U$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\pi/2-\delta$, то будем иметь

$$|\lambda_m(x_0)-\lambda_n(x_0)|\,\|x-y\|=\|(\lambda_m(x_0)-\lambda_n(x_0))(x-y)\|=$$

$$=\|(f(x)-f(y)-\lambda_n(x_0)(x-y))-(f(x)-f(y)-\lambda_m(x_0)(x-$$

$$-y))\|\leqslant\|f(x)-f(y)-\lambda_n(x_0)(x-y)\|+\|f(x)-f(y)-$$

$$-\lambda_m(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|+\varepsilon+\varepsilon\|x-y\|+\varepsilon.$$

Итак $|\lambda_m(x_0)-\lambda_n(x_0)|\,\|x-y\|\leqslant2\varepsilon\|x-y\|+2\varepsilon$.

Из полученного соотношения следует, что числовая последовательность $\lambda_n(x_0)$ сходится и пусть $\lambda(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n(x_0)$.

Оказывается, что этот предел $\lambda(x_0)$ не зависит от выбора последовательности f_n. В самом деле, пусть (f'_n) другая последователь ность отображений $f'_n: G\to H$, принадлежащих классу Б, тоже равномерно сходящаяся к отображению f, и пусть $\lambda'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda'_n(x_0)$, где $\lambda'_n(x)=\lambda_{f'_n}(x)$. Повторяя вышеприведенные рассуждения, можно показать, что для любого $\varepsilon>0$ и для достаточно большого n существуют окрестность $U^*\subset G$ точки x_0, конечномерное подпространство L^* и число $\delta^*>0$ такие, что если $x, y\in U^*$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L^* не меньше $\pi/2-\delta^*$, то одновременно выполняются оба соотношения: $\|f(x)-f(y)-\lambda_n(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|+\varepsilon$;

$$\|f(x)-f(y)-\lambda'_n(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|+\varepsilon,$$

из которых нетрудно заключить, что $|\lambda_n(x^0)-\lambda'_n(x_0)|\to0$ при $n\to\infty$, т. е. $\lambda(x_0)=\lambda'(x_0)$.

Таким образом, каждое отображение $f: G\to H$, принадлежащее $\overline{\text{Б}}$, однозначным образом порождает действительную функцию, сопоставляющую точке $x\in G$ число $\lambda(x)$, которую и будем называть терминальной производной отображения f и обозначать через $\lambda_f(x)$.

Предложение 5. Терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения $f: G\to H$, принадлежащего $\bar{Б}$, обладает следующими свойствами:

I. Для всякой точки $x_0\in G$ и для всякого $\varepsilon>0$ существуют окрестность $U\subset G$ точки x_0, конечномерное подпространство $L\subset H$ и число $\delta>0$ такие, что если $x, y\in U$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\pi/2-\delta$, то

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leq\varepsilon\|x-y\|+\varepsilon.$$

II. Функция $\lambda_f(x)$ непрерывна на G.

Рассмотрим произвольное открытое подмножество G пространства H и множество $\Phi(G)$ всех отображений $f: G\to H$, принадлежащих $\bar{Б}$. Оказывается, что $\Phi(G)$ является линейным пространством, точнее, имеет место следующее утверждение.

Предложение 6. Если отображение $f, g: G\to H$ принадлежит $\bar{Б}$, то и отображения $h=f+g$ и μf, где μ — произвольное действительное число, тоже принадлежат классу $\bar{Б}$, причем выполнены соотношения $\lambda_{f+g}(x)=\lambda_f(x)+\lambda_g(x)$ и $\lambda_{\mu f}(x)=\mu\lambda_f(x)$ для любой точки $x\in G$.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների արտապատկերումների մի դասի հատկությունների մասին

Հոդվածը նվիրված է իրական սեպարաբել հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների Վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից մտցված Б *դասի հետազոտմանը։ Այդ դասի սահմանումը և նրա մի շարք հիմնական հատկությունների ապացույցը պարունակվում են* [1]*-ում։*

Ներկա հոդվածում բերվում են Б *դասի մի քանի նոր հատկություններ, մասնավորապես նշվում է օրթոգոնալ պրոյեկտման օպերատորի* Б *դասին պատկանելության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը։*

Այստեղ տրվում են նաև Б *դասի* $\bar{Б}$ *փակույթի սահմանումը, այդ փակույթին պատկանող արտապատկերման թերմինալ ածանցյալի գաղափարը և նշվում այդ ածանցյալի անընդհատությունը։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Г. Болтянский*, «Известия АН Арм. ССР», Математика, т. IX, № 2 (1974).
[2] *Н. Бурбаки*, Топологические векторы пространства, «Изд. иностранной литературы», М., 1959. [3] *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев*, Элементы функционального анализа, Изд. «Наука», М., 1965.