ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 4

УДК 62.507

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Ш. Е. Бозоян

Приспособление языка Лукасевича к описанию функциональных схем

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 28/II 1979)

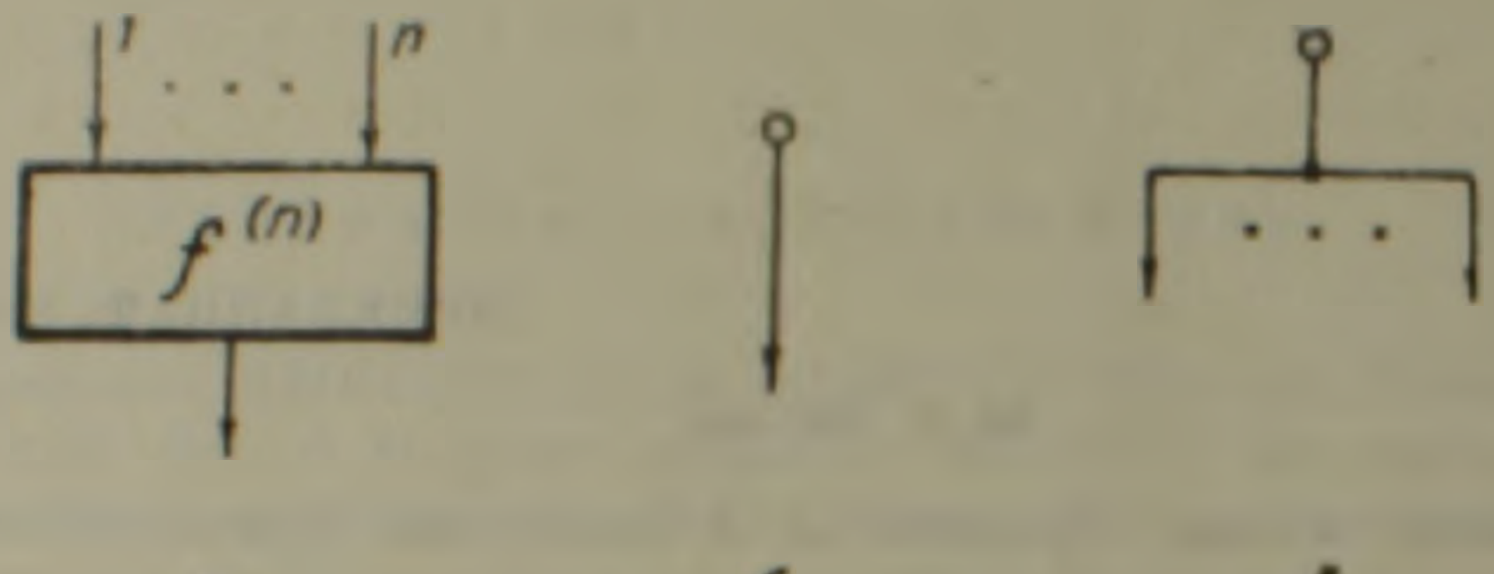
Язык бесскобочной записи формул Лукасевича ([1]) можно использовать для описания функциональных схем, не имеющих точек ветвления и обратных связей, так как граф этих схем, а также граф формул, является входящим деревом ([2]), и поэтому любая такая схема может трактоваться как формула. Наличие точек ветвлений (что характерно для функциональных схем в общем случае) существенно усложняет картину, и указанный язык делается непригодным для описания функциональных схем в общем случае.

В настоящей заметке обобщается язык Лукасевича для случая функциональных схем в общем случае. Вводится понятие записи функциональной схемы (запись представляет собой конечную последовательность символов из некоторого алфавита) и доказывается аналог (обобщение) теоремы Лукасевича. Обобщенный язык может быть применен в области автоматизации проектирования вычислительных устройств. Он может быть основой для создания алгебраической теории функциональных схем.

Пусть имеется некоторое устройство, имеющее n упорядоченных входов и один выход (рис. 1, *а*). На каждый из входов может подаваться один из двух сигналов, которые обозначим символами 0 и 1 соответственно, и при каждом наборе сигналов на входах на выходе в тот же момент однозначно возникает один из сигналов 0 или 1. Такое устройство назовем функциональным элементом. Таким образом, функциональный элемент реализует некоторую функцию алгебры логики. Функциональный элемент, реализующий функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, обозначим символом $f^{(n)}$. Будем рассматривать также устройства, не имеющие входов и имеющие один или несколько выходов (рис. 1, *б*, *в*). Физический смысл этих устройств заключается в том, что они являются генераторами сигналов 0 и 1. В каждый момент времени на выходе (выходах) такого устройства появляется один из сигналов 0 или 1 (при нескольких выходах на всех выходах 0 или на всех выходах 1). Это устройство будем называть элементарной схемой или сложной элементарной схемой в зависимости от того, число выходов 1 или больше. Элементарную схему (сложную элементар-

ную схему), генерирующую сигнал x, обозначим символом x.

В дальнейшем для краткости функциональную схему будем называть просто схемой.



а б в

Рис. 1

Определение схемы. 1) Всякая элементарная схема является схемой (рис. 2, *а*). Входом этой схемы является элементарная схема, выходом — выход элементарной схемы.

2) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — элементарные схемы, $f^{(n)}$ функциональный элемент. Если отождествить выходы $x_1, \ldots, x_n$ со входами элемента $f^{(n)}$ с номерами $1, \ldots, n$ соответственно, то получится некоторая конструкция S (рис. 2,*б*), которая является схемой. Входами этой схемы являются элементарные схемы $x_1, \ldots, x_n$, выходом — выход элемента $f^{(n)}$.

3) Пусть определена схема S', содержащая элементарные схемы $x_1, \ldots, x_{l_k}$, а x — сложная элементарная схема с k выходами. При отождествлении выходов всех этих элементарных схем с выходами x соответственно получаем некоторую конструкцию S (рис. 2,*в*), которая является схемой. Входами этой схемы являются элементарные схемы $x_1, \ldots, x_{l_1-1}, x_{l_1+1}, \ldots, x_{l_k-1}, x_{l_k+1}, \ldots, x_n$ и сложная элементарная схема x, выходом — выход схемы S'.

4) Пусть определены схемы S' и S''. Если отождествить выход схемы S'' со входом x_l схемы S', то полученная конструкция S (рис. 2, *г*) также является схемой. Входами схемы S являются все входы S', кроме x_l, и все входы схемы S'', выходом — выход схемы S'.

5) Всякая схема может быть построена из функциональных элементов и элементарных схем (сложных элементарных схем) за конечное число шагов при помощи конструкций, описанных в 1)—4).

Определим понятие записи схемы. Запись схемы S обозначим через $з(S)$.

Определение. 1) Если S есть элементарная схема x, то $з(S) = x$.

2) Если схема S получена из элементарных $x_1, \ldots, x_n$ и из функционального элемента $f^{(n)}$ согласно п. 2 определения схемы, то

$$з(S) = f^{(n)} x_1 \ldots x_n.$$

3) Если схема S получена из схемы S' путем „объединения" входов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ в x согласно п. 3 определения схемы, то з(S) получается из з(S') следующим образом: пусть x_{i_r} $(1 \leqslant r \leqslant k)$ среди символов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ в з(S') является первым (слева). Заменим в з(S') x_{i_r} на $M_p^0 x$, а любой из символов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}, x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_k}$ — на M_p. Полученная последовательность символов является з(S).

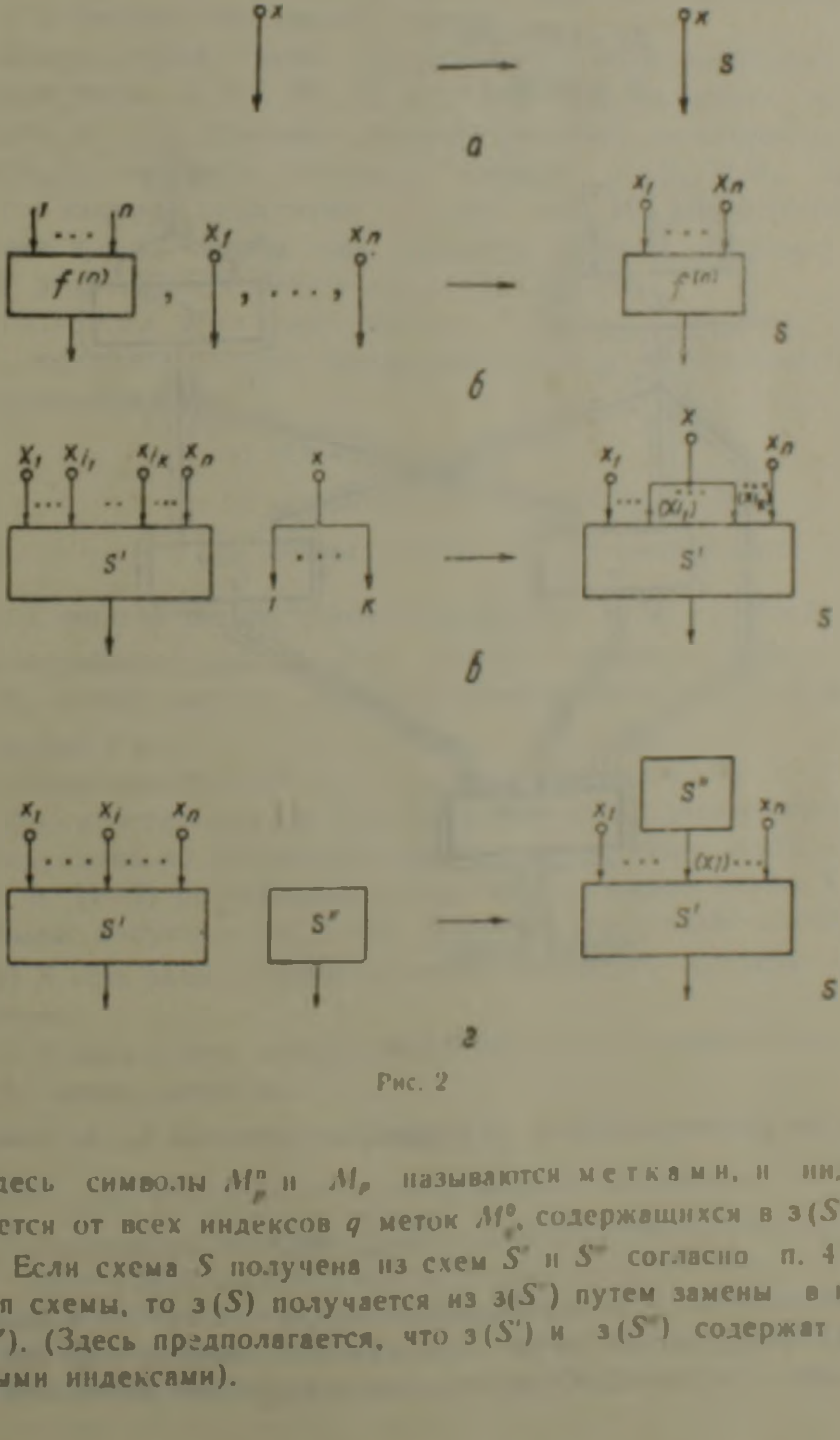


Рис. 2

Здесь символы M_p^n и M_p называются метками, и индекс p отличается от всех индексов q меток M_q^0, содержащихся в з(S').

4) Если схема S получена из схем S' и S'' согласно п. 4 определения схемы, то з(S) получается из з(S') путем замены в ней x_i на з(S''). (Здесь предполагается, что з(S') и з(S'') содержат метки с разными индексами).

На рис. 3 изображена функциональная схема, записью которой является последовательность

$$f_1^{(3)} M_1^0 f_5^{(3)} x_1 x_2 x_3 f_2^{(2)} M_1 M_2^0 f_4^{(2)} M_3^0 x_4 M_3 f_3^{(2)} M_1 M_2.$$

Ход записи показан тонкой линией со стрелками.

Символам типов x, $f^{(n)}$, M^0, M, из которых состоит запись схемы, сопоставим веса следующим образом:

$$1)\ \omega(x) = \omega(M) = -1,$$

$$2)\ \omega(M^0) = 0,$$

$$3)\ \omega(f^{(n)}) = n - 1.$$

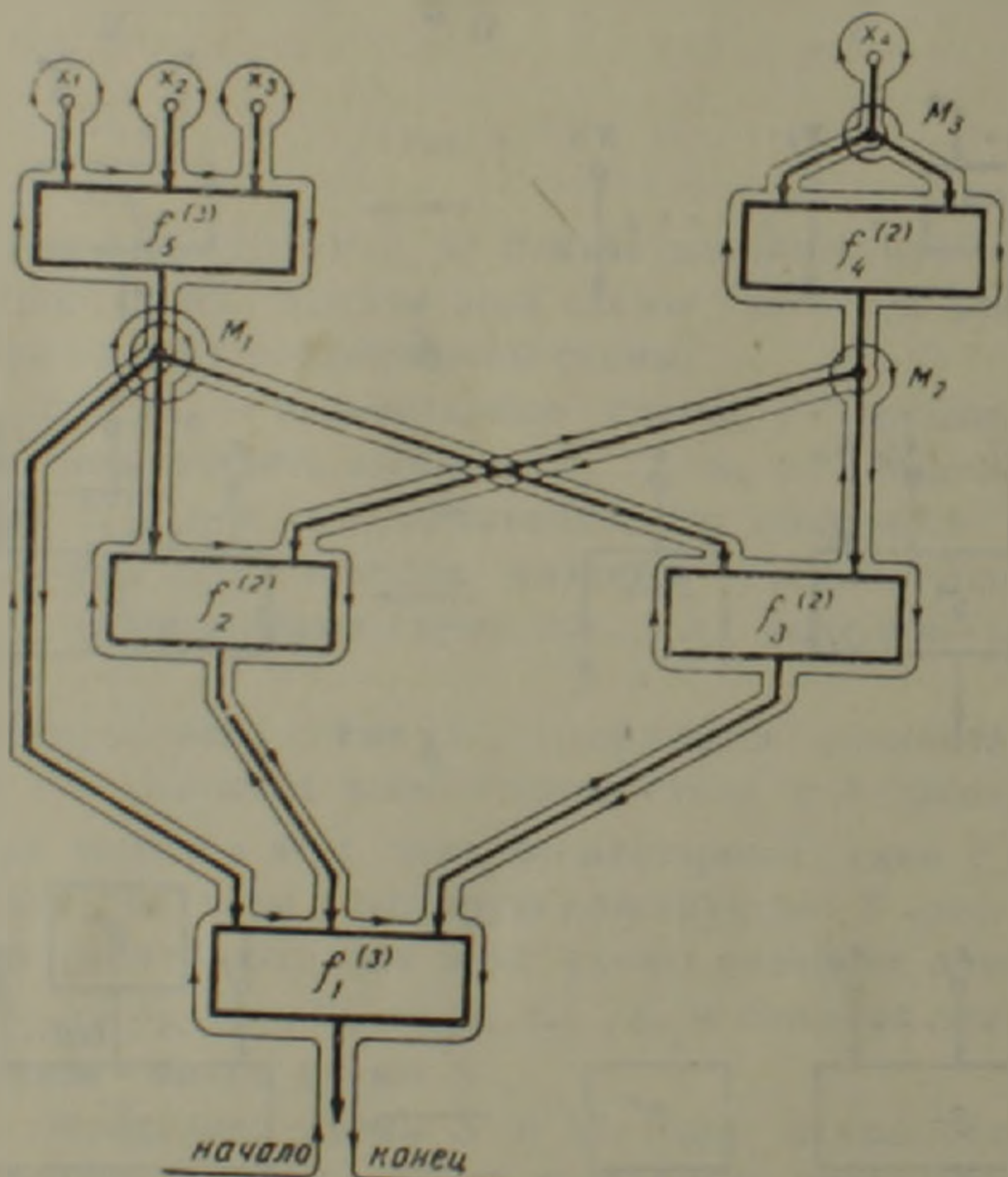


Рис. 3

Весом последовательности из указанных символов $s_1 \ldots s_N$ называется число

$$\omega(s_1 \ldots s_N) = \sum_{i=1}^{N} \omega(s_i).$$

Описанием метки M_l (обозначим его $\mathrm{On}(M_l)$) в последовательности $s_1 \ldots s_N$ называется минимальный отрезок этой последовательности с весом -1, непосредственно следующий за меткой M_l^0.

Определим понятие зависимости M_i от M_j в данной последовательности символов.

Определение. В последовательности символов $s_1 \dots s_N$

1) если M_j содержится в Оп (M_i), то M_i зависит от M_j;

2) если M_i зависит от M_k, а M_k зависит от M_j, то M_i зависит от M_j;

3) M_i зависит от M_j только согласно п. п. 1) и 2).

Запись $s' \prec s''$ будет означать, что символ s' предшествует символу s'' в данной последовательности.

Запись любой схемы представляет собой последовательность символов типов x, $f^{(n)}$, M^0, M, но, очевидно, не всякая последовательность из этих символов является записью некоторой схемы. Не существует, например, схемы с записью $M_1 M_2 f^{(3)} M_1$. Возникает вопрос: какими свойствами должна обладать последовательность символов $s_1 \dots s_N$, чтобы она являлась записью некоторой схемы S? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема. *Для того, чтобы последовательность символов $s_1 \dots s_N$ являлась записью некоторой схемы S, необходимо и достаточно, чтобы:*

а) $\omega(s_1 \dots s_N) = 1$,

б) $\omega(s_1 \dots s_k) \geqslant 0$, *для всякого* $k < N$,

в) *метка* M_i $(i = 1.2, \dots)$ *содержалась в* $s_1 \dots s_N$ *тогда и только тогда, когда содержалась и* M_i^0, *причем последняя не более одного раза, и для любого вхождения* M_i *в* $s_1 \dots s_N$ $M_i^0 \prec M_i$; *кроме того* $s_1 \dots s_N$ *не содержала пары* $M_i^0 M_j$ *или* $M_i^0 M_j^0$ *при любых* i *и* j.

г) *для любого* i M_i *в* $s_1 \dots s_N$ *не зависела от* M_i.

Доказательство. Необходимость. Доказательство ведем индукцией по построению схемы, т. е. по числу $m(S)$ применений п. п. 1)—2) определения схемы при построении схемы S.

Базис индукции $(m(S) = 1)$. Возможны следующие случаи:

а) S есть элементарная схема x. Очевидно, условия теоремы выполнены.

б) S есть схема, построенная согласно п. 2 определения схемы, т. е. ее запись имеет вид

$$f^{(n)} x_1 \dots x_n.$$

Очевидно, и в этом случае условия теоремы выполнены.

Индуктивный переход. Пусть необходимость доказана для всех схем, у которых $m(S) < m_0$. Пусть S произвольная схема, для которой $m(S) = m_0$. Так как $m_0 > 1$ (случай $m_0 = 1$ рассматривался в базисе), то при построении S последним пунктом применения может быть п. 3 или п. 4. Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) S получается из S' и из сложной элементарной схемы x применением п. 3 определения схемы. Поскольку

$$\omega(M_p^0 x) = \omega(x) \text{ и}$$

$$\omega(M_p) = \omega(x_{i_1}) = \ldots = \omega(x_{i_k}),$$

то для з(S) условия теоремы а) и б) выполняются, так как этим условиям удовлетворяет з(S') (согласно индуктивному предположению). Выполнение условий в) и г) также следует из индуктивного предположения и из п. 3 определения записи.

б) S получается из S' и S'' согласно п. 4 определения схемы. Выполнение условий теоремы следует из того, что з(S') и з(S'') удовлетворяют этим условиям (по индуктивному предположению) и множества меток в з(S') и з(S'') не пересекаются. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность

$$s_1 \ldots s_N \tag{1}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. Докажем, что существует схема с записью (1). Доказательство ведем индукцией по числу меток в (1). Обозначим это число через m.

Базис индукции ($m=0$). Базис индукции доказывается индукцией по длине N последовательности (1).

$Б_1$) Если $N=1$, то последовательность (1) состоит из единственного члена, который может быть только символом x_i. Но x_i является записью элементарной схемы x_i.

$Б_2$) Пусть достаточность верна для всех последовательностей (1), у которых $m=0$ и $N<N_0$, и докажем ее справедливость, если $m=0$ и $N=N_0$. Пусть для $s_1 \ldots s_{N_0}$ $m=0$. Из $N_0>1$ следует, что $s_1 \ldots s_{N_0}$ содержит символов типа $f^{(n)}$. Пусть $f_i^{(n)}$ в $s_1 \ldots s_{N_0}$ находится правее среди всех символов типа $f^{(n)}$. Из условий а) и б) теоремы следует, что после $f_i^{(n)}$ стоят по крайней мере n символов типа x, т. е. $s_1 \ldots s_{N_0}$ имеет вид

$$s_1 \ldots s_{k-1} f_i^{(n)} x_{k+1} \ldots x_{k+n} x_{k+n+1} \ldots x_{N_0}. \tag{2}$$

Последовательности $s_1 \ldots s_{k-1} x x_{k+n+1} \ldots x_{N_0}$ (x не входит в $s_1 \ldots s_{N_0}$) и $f_i^{(n)} x_{i+1} \ldots x_{k+n}$ удовлетворяют условиям теоремы и их длины меньше N_0. Следовательно они являются записями некоторых схем S' и S'' соответственно, из которых согласно п. 4 определения схемы получается некоторая схема с записью (2).

Индуктивный переход. Пусть достаточность доказана для всех последовательностей (1), у которых $m<m_0$. Докажем ее для последовательностей, у которых $m=m_0$. Пусть последовательность (1) удовлетворяет условиям теоремы и для нее $m=m_0$. Заметим, что среди всех меток в (1) существует метка, описание которой не содержит других меток. Действительно, если Оп(M_{i_1}) содержит некоторую метку M_{i_2}, Оп(M_{i_2}) — метку M_{i_3} и т. д., то ввиду конечности числа

меток в (1), в последовательности

$$M_{i_1},\ M_{i_2},\ M_{i_3},\ldots$$

метки повторяются. Пусть $M_{i_{k+l}}=M_{i_k}$. Тогда получается, что M_{i_k} зависит от M_{i_k}, что противоречит условию теоремы. Итак, существует метка M_l, описание которой не содержит других меток. Представим последовательность (1) в виде

$$s_1 \ldots s_k M_l^0 \text{Оп}(M_l)\, s_{k+r} \ldots s_{k+t_1-1} M_l\, s_{k+t_1+1} \ldots s_{k+t_p-1} M_l\, s_{k+t_p+1} \ldots s_N \quad (1')$$

где $\text{Оп}(M_l)$ не содержит меток. Последовательности

$$\text{Оп}(M_l) \tag{3}$$

и

$$s_1 \ldots s_k x\, s_{k+r} \ldots s_{k+t_1-1} x\, s_{k+t_1+1} \ldots s_{k+t_p-1} x\, s_{k+t_p+1} \ldots s_N, \tag{4}$$

удовлетворяют условиям теоремы и для них $m<m_0$. следовательно существуют схемы S' и S_1 с записями (3) и (4) соответственно. Но из S_1 и из сложной элементарной схемы x с $p+1$ выходами согласно п. 3 определения схемы можно построить некоторую схему S'' с записью

$$s_1 \ldots s_k M_l^0 x\, s_{k+r} \ldots s_{k+t_1-1} M_l\, s_{k+t_1+1} \ldots s_{k+t_p-1} M_l\, s_{k+t_p+1} \ldots s_N.$$

Из S' и S'' согласно п. 4 определения схемы можно построить схему S с записью (1'). Теорема доказана.

Приведенный язык и доказанная теорема позволяют эффективно моделировать функционирование схемы в вычислительных машинах. Алгоритм вычисления значения выходного сигнала по значениям входных сигналов можно описать следующим образом. Пусть схема S имеет n входов (обозначим их $x_1,\ldots,x_n$) и один выход. Рассмотрим конкретные значения входных сигналов: $x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n$ и в $з(S)$ заменим символы x_i на a_i ($a_i\in|0,1|$, $i=\overline{1,n}$) соответственно. Теперь на $з(S)$ многократно применим следующие процедуры, пока их возможно применить:

1. Заменить подпоследовательность вида $f^{(k)}\beta_1\ldots\beta_k$ ($\beta_i\in|0.1|$, $i=\overline{1,\ n}$) на $f^{(k)}(\beta_1,\ \ldots,\ \beta_k)\in|0,\ 1\}$.

2. Пару символов $M_i^0\beta$ ($\beta\in|0,1|$), а также все вхождения символа M_i заменить на β.

В результате, очевидно, получается 0 или 1, что является значением выходного сигнала.

Наконец, всем известным правилам тождественного преобразования схем можно сопоставить соответствующие правила преобразования на этом языке, что позволяет создать алгебру преобразований записей схем.

Ереванский политехнический
институт им К Маркса

Ե. Ս. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Լուկասեվիչի լեզվի հաշվարկումը ֆունկցիոնալ սխեմաների նկարագրության համար

Բանաձևերի՝ առանց փակագծերի գրության Լուկասևիչի լեզուն ընդհանրացվում և հարմարեցվում է ֆունկցիոնալ սխեմաների նկարագրության։ Մտցվում է ֆունկցիոնալ սխեմայի գրության հասկացողությունը, որը իրենից ներկայացնում է սիմվոլների վերջավոր հաջորդականություն։ Ապացուցվում է Լուկասևիչի թեորեմի ընդհանրացումը։

Ընդհանրացված լեզուն կարող է ֆունկցիոնալ սխեմաների հանրահաշվական տեսության կառուցման հիմք հանդիսանալ, ինչպես նաև կիրառվել հաշվիչ սարքերի նախագծման ավտոմատացման բնագավառում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Lukasiewicz*. Sur la formalisation des theorie mathematiges. Collogues Internationaux du Centre National de la Recherche scientifigue, 36. Paris, 1950, стр. 11—19 (1953). [2] *Ф. Харари*. Теория графов, стр. 235, „Мир", М., 1973.