УДК 51:330.115

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

А. А. Бабаджанян

Совершенное агрегирование систем линейных
 балансовых уравнений

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 19/VIII 1978)

1. Система балансовых уравнений макроэкономики имеет вид:

$$x = Ax + y, \quad (1.1)$$

где x — вектор валового выпуска продукции, y — вектор конечного выпуска, матрица $A = \{a_{ij}\}_1^n$ неотрицательная, a_{ij} — имеют смысл коэффициентов прямых затрат i -ой продукции, в j -ой отрасли. Предполагается вполне продуктивность матрицы A (1) и выполнение условий

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} < 1 \quad i=1, \dots, n. \quad (1.2)$$

Агрегирование системы (1.1) состоит, как известно (2-1), в построении аналогичной системы размерности m ($m < n$)

$$\bar{x} = \bar{A}\bar{x} + \bar{y} \quad (1.3)$$

при помощи агрегирующих матриц C и D порядков $m \times n$ и ранга m , задающих линейные преобразования

$$\bar{x} = Cx, \quad \bar{y} = Dy. \quad (1.4)$$

При фиксированной (пассивной) матрице C , имеющей вид

$$C = C^0 F, \quad (1.5)$$

где $C^0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, а $F = \{f_{ij}\}_1^n$,

условие совместности системы агрегирования (1.3), (1.4) есть

$$(E_m - \bar{A})C = D(E_n - A). \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует

$$E_m - \bar{A} = D(E_n - A)C^+, \quad (1.7)$$

где C^+ — псевдообратная матрица к C .

Необходимое и достаточное условие разрешимости матричного уравнения (1.6) относительно $E_m - \bar{A}$ имеет вид ⁽³⁾:

$$D(E_n - A)(E_n - C^+C) = 0. \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) задает агрегирующую (активную) матрицу D . Такое агрегирование названо биматричным ⁽³⁾.

О п р е д е л е н и е. Назовем совместное агрегирование совершенным, если одновременно с (1.6) выполняется условие вполне продуктивности матрицы $\bar{A}$. Требуется выполнение условий, аналогичных (1.2)

$$\bar{a}_{pq} \geq 0, \quad \sum_{q=1}^m \bar{a}_{pq} \leq 1, \quad p, q = 1 \dots m. \quad (1.9)$$

Следует отметить, что попытки одноматричного агрегирования ($C=D$) являются примером совершенного агрегирования, но условия Хатанака ⁽⁴⁾ выполняются для очень частного случая матрицы коэффициентов прямых затрат. Известно, что в общем случае рассчитывать на точное (совместное) решение проблемы агрегирования (одноматричного) не приходится ⁽⁵⁾.

Цель данной работы — показать, что в биматричном случае существует совершенное агрегирование, и получить конструкцию активной матрицы D .

2. Для упрощения выкладок заметим, что в ⁽³⁾ вводится скелетное разложение матрицы $E_n - C^+C : E_n - C^+C = \omega v$ и матрица $W = (E_n - A)\omega$. Там самым (1.8) становится эквивалентным уравнению

$$DW = 0, \quad (2.1)$$

где W имеет порядок $n \times (n-m)$ и ранг $n-m$, из которого находится матрица D ⁽³⁾. Уравнение (2.1) имеет неотрицательное частное решение, что следует из следующей леммы.

Лемма. Матричное уравнение

$$X(E_n - A)(E_n - C^+C) = 0$$

имеет неотрицательное решение.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать неразрешимость векторного неравенства $(E_n - A)(E_n - C^+C)u > 0$, где u — вектор-столбец. Пусть существует вектор u , удовлетворяющий указан-

ному неравенству, тогда $(E_n - C + C)u$ есть проекция u на ядро матрицы C ⁽³⁾, обозначаемое $N(C) = \{z : Cz = 0\}$. Из того, что матрица C агрегирующая, т. е. содержащая во всех столбцах один положительный элемент, следует, что множество неотрицательных векторов ядра $N(C)$ пусто. Одновременно, $(E_n - C + C)u \geq 0$, так как матрица $E_n - A$ монотонного вида. Полученное противоречие доказывает лемму.

Пусть агрегирующая матрица C имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1/k & \dots & 1/k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

где $c_{11} = \dots = c_{1k} = 1/k$, $c_{i, i-k+1} = 1$ ($i = 2 \dots m$, $m = n - k + 1$), а остальные элементы матрицы C нулевые. Без ограничения общности здесь принято, что "агрегирующей" является первая строка.

При агрегировании матрицей C вида (2.2) имеет место следующая основная теорема.

Теорема. Если объединяются только несколько отраслей в одну, то при любой матрице коэффициентов прямых затрат существует неотрицательная агрегирующая матрица D^* с условиями

$$\sum_{j=1}^n d_{ij}^* = 1 \quad i = 1 \dots m,$$

обеспечивающая совершенное агрегирование.

Доказательство. Покажем, что при $D^* = SD$, выполняются необходимые и достаточные условия вполне продуктивности матрицы $\bar{A}$ ⁽¹⁾, где $D = \{d_{ij}\}$ ($i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots n$) отмеченное выше решение матричного уравнения (2.1), а S — невырожденная матрица порядка $m \times m$, имеющая вид

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_m & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$s_1 = 1$$

$$s_p = \max_j \left(-\frac{d_{pj}}{d_{1j}} \right) > 0 \quad p = 2 \dots m.$$

Учитывая вид матриц C и C^* , матрицу W можно представить следующим образом

$$W = \begin{pmatrix} E_{k-1} \\ O_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{k-1}^{k-1} \\ A_m^{k-1} \end{pmatrix} - \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \Sigma \\ -\Sigma^0 \end{pmatrix} \cdot I, \quad (2.4)$$

где A_{k-1}^{k-1} — подматрица матрицы A , лежащая на пересечении первых $k-1$ столбцов и строк, а A_m^{k-1} — первых $k-1$ столбцов и последних

m строк; $\Sigma^0 = (\Sigma_{k+1}^0 \dots \Sigma_n^0)^T$, где $\Sigma_i^0 = \sum_{j=1}^k a_{ij}$ ($i=1 \dots n$); $\Sigma = (\Sigma_1' \dots \Sigma_k')^T$,

а $\Sigma_i' = 1 - \Sigma_i^0$ ($i=1 \dots k$); наконец l — вектор-строка, состоящая из единиц. Из соотношения (2.4) замечая, что первые $k-1$ строк линейно независимы, можно выписать матрицу D в следующем блочном виде:

$$D = (-W_m \cdot W_{k-1}^{-1}, E_m), \quad (2.5)$$

где W_{k-1} — матрица, составленная из первых $k-1$ строк, а W_m — из последних m строк матрицы W . Очевидно, что D^* есть неотрицательное решение уравнения (2.1), так как первая строка матрицы D неотрицательна.

Покажем неотрицательность элементов первого столбца матрицы $\bar{A}$, откуда, учитывая очевидную цепочку неравенств

$$\sum_{l=1}^k d_{pl}^* a_{lp+k-1} \leq \sum_{l=1}^k d_{pl}^* \Sigma_l' \leq d_{pp+k-1}^* \Sigma_{p+k-1}^0 < d_{pp+k-1}^* (1 - a_{p+k-1, p+k-1}), \quad (p=2 \dots m)$$

будет следовать, что и $\bar{a}_{pp} \geq 0$ ($p=2 \dots m$). Неотрицательность остальных недиагональных элементов матрицы $\bar{A}$ и элемента $\bar{a}_{11}$ будет вытекать из структуры матрицы D^* и уравнения (1.7).

Вводя обозначение $\Sigma' = (\Sigma_1' \dots \Sigma_{k-1}')^T$, элемент $\bar{a}_{p1}$ ($p=2 \dots m$) можно представить

$$\bar{a}_{p1} = s_p w_k W_{k-1}^{-1} \Sigma' - s_p \Sigma_k' + w_{p+k-1} W_{k-1}^{-1} \Sigma' + \Sigma_{p+k-1}^0, \quad (2.6)$$

где w_t — t -ая строка матрицы W ($t=k, p+k-1$). Пусть

$$s_p = -\frac{d_{p10}}{d_{110}}, \quad d_{p10} < 0,$$

тогда, после подстановки этого выражения в (2.6), покажем неравенства:

$$\bar{a}_{p1} \geq 0 \quad (p=2 \dots m).$$

Обозначая j_0 -ый столбец матрицы $E_{k-1} - A_{k-1}^{k-1}$ через α , а через $\gamma = (\gamma_1 \dots \gamma_{k-1})^T = (E_{k-1} - A_{k-1}^{k-1})^{-1} (a_{1k} \dots a_{k-1, k})^T$ и применяя формулу Шермана-Моррисона, после несложных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} & d_{p10} w_k W_{k-1}^{-1} \Sigma' - d_{p10} \Sigma_k' - d_{110} w_{p+k-1} W_{k-1}^{-1} \Sigma' - d_{110} \Sigma_{p+k-1}^0 \geq \\ & \geq (a_{p+k-1, 1} \dots a_{p+k-1, k-1}) \alpha [1 - a_{kk} - (a_{k1} \dots a_{kk-1}) \gamma_1] + \\ & + (a_{k1} \dots a_{kk-1}) \alpha [a_{p+k-1, k} + (a_{p+k-1, 1} \dots a_{p+k-1, k-1}) \gamma_1]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тяк как все элементы правой части (2.7) положительны, а $\gamma_i < 1$ ($i=1 \dots k-1$), то правая часть (2.7) неотрицательна. Условие $\sum_{j=1}^n d_{ij}^* = 1$ ($i=1 \dots m$), а значит и (1.9), следует из того, что общее решение уравнения (2.1) ранга m имеет вид γD , где γ — произвольная невырожденная матрица порядка $m \times m$.

Наконец, для строк матрицы $\bar{A}$ с суммой, равной единице, из (1.7), (2.3) и (2.5) следует, что они содержат хотя бы один, отличный от нуля, элемент левее диагонали. Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичная теорема имеет место для системы линейных балансовых уравнений двойственной системе (1), т. е. с условиями

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1 \quad j=1 \dots n,$$

но с агрегирующей (невзвешенной) матрицей C вида:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $c_{11} = \dots = c_{1k} = 1$, $c_{i, i+k-1} = 1$, ($i=2 \dots m$, $m=n-k+1$), а остальные элементы матрицы C нулевые.

Замечание 2. Нетрудно видеть (²), что матрица D^* составлена из m (определенных!) квазиединичных крайних векторов конуса неотрицательных решений векторного уравнения $x(E_n - A)(E_n - C + C) = 0$.

Замечание 3. Матрица X может быть выбрана из условия $Cy = XD^*y$, $y \in R^m$.

Последовательно применяя теоремы, можно утверждать, что совершенное агрегирование систем линейных балансовых уравнений существует и для произвольного средневзвешенного и, соответственно, невзвешенного агрегирования.

Армянский научно-исследовательский институт энергетики

Ա. Ա. ԲԱՐԱԶԱՆՅԱՆ

Գծային բալանսային հավասարումների սխտեմների կատարյալ ագրեգացում

Աշխատանքում մտցվում է գծային բալանսային հավասարումների սխտեմների կատարյալ ագրեգացման հասկացությունը՝ Ցույց է տրվում, որ համատեղության պայմանին բավարարող մատրիցան կարելի է գտնել ոչ բացասական մատրիցաների դասից:

Ապացուցվում է երկմատրիցանի կատարյալ ազրեզացման սիստեմի գոյութիւնը՝ ուղղակի ծախսերի գործակիցների նշանակազած մատրիցայի դեպքում: Բերվում է ոչ բացասական ազրեզացնող ակտիվ մատրիցայի կառուցման արդյունավետ ալգորիթմը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. Г. Охрименко, ДАН СССР, 234, № 1 (1977). ² *Ijtri Juhl*, Econometrica, 36 № 2 (1968). ³ В. П. Вен, А. И. Эрлих, «Известия» АН СССР, Техническая кибернетика, № 5 (1970). ⁴ В. Л. Вен, «Известия» АН СССР, Техническая кибернетика, № 3 (1974). ⁵ А. Алберт, Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание, «Наука», М., 1977. ⁶ В. В. Коссов, Межотраслевые модели (теория и практика использования), «Экономика», М., 1973. ⁷ С. Н. Черников, Линейные неравенства, «Наука», М., 1968.