ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 4

УДК 517

МАТЕМАТИКА

С. Г. Симонян, Л. А. Багдасарян

О лакунах в спектре одномерного периодического оператора Дирака с потенциалом конечной гладкости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 13/III 1979)

Рассмотрим одномерную систему Дирака канонического вида:

$$J\frac{dy}{dt}+A(t)y=\lambda y,\quad -\infty<t<+\infty, \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр,

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad A(t)=\begin{pmatrix}p(t) & q(t)\\ q(t) & -p(t)\end{pmatrix}.$$

Предполагается, что 1) матрица — функция $A(t)$ вещественна и периодична с периодом a $(a>0)$: $A(t)=A(t+a)\ \forall t\in(-\infty;+\infty)$; 2) $A^{(n-1)}(t)$ ($\forall n\geqslant 1$, n — фиксированное целое число) абсолютно непрерывна на отрезке $[0;a]$.

В работах [1,2] установлено, что непрерывная часть спектра одномерного периодического оператора Дирака L, порожденного дифференциальным выражением $l(y)=\left(J\frac{d}{dt}+A(t)\right)y$ в пространстве $H=L_2(-\infty;+\infty)\oplus L_2(-\infty;+\infty)$ состоит из зон устойчивости с присоединенными к ним граничными точками зон неустойчивости. Дискретная часть спектра оператора L есть пустое множество, так что внутренние точки зон неустойчивости являются точками регулярности оператора L. Тем самым установлено, что спектр оператора L непрерывен с лакунами (пропусками). Лакуны в спектре образуют счетное число интервалов, крайние точки которых являются нулями целых функций $F(\lambda)\mp 1$. Напомним, что если фундаментальная матрица $Y(t,\lambda)$ решений системы (1) удовлетворяет условию $Y(0,\lambda)=E$ (E — единичная матрица), то выражение $F^2(\lambda)-1$ есть дискриминант квадратного уравнения $\det\,(Y(a,\lambda)-\rho E)=0$, при этом $F(\lambda)=\frac{1}{2}\operatorname{sp}Y(a,\lambda)$. Обозначим через Δ_k ширину k-ой лакуны.

Цель настоящей работы получить асимптотическую формулу для Δ_k $(k\to\infty)$ при вышеуказанных условиях 1) и 2).

Для скалярного уравнения Хилла и для системы Хилла аналогичные задачи рассмотрены в работах [3-12].

Неособенным линейным преобразованием $y=\Pi(t,\lambda)x$, где

$$\Pi(t,\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ u(t,\lambda) & \bar u(t,\lambda)\end{pmatrix},$$

$$u(t,\lambda)=\sum_{\nu=0}^{n}\lambda^{-\nu}u_\nu(t),\quad u_0(t)=i\quad (i=\sqrt{-1}),$$

$$u_1(t)=q(t)-ip(t),\quad u_{\nu+1}(t)=\frac{1}{2i}\Big[\frac{d}{dt}u_\nu(t)+2q(t)u_\nu(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{\nu}u_j(t)\,u_{\nu+1-j}(t)-p(t)\sum_{j=0}^{\nu}u_j(t)\,u_{\nu-j}(t)\Big],$$

система (1) приводится к виду

$$\frac{dx}{dt}=\Lambda(t,\lambda)\,x+\lambda^{-n}R(t,\lambda)\,x, \tag{2}$$

где

$$\Lambda(t,\lambda)=\begin{pmatrix}w(t,\lambda) & 0\\ 0 & \bar w(t,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$w(t,\lambda)=-i\,[\lambda+p(t)]\,\mathrm{Im}\,u(t,\lambda)-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\ln \mathrm{Im}\,u(t,\lambda)\right),$$

$$R(t,\lambda)=\begin{pmatrix}i\,\mathrm{Im}\,r(t,\lambda) & -\bar r(t,\lambda)\\ -r(t,\lambda) & -i\,\mathrm{Im}\,r(t,\lambda)\end{pmatrix},$$

$$r(t,\lambda)=(-2i\,\mathrm{Im}\,u(t,\lambda))^{-1}\Big[\frac{d}{dt}u_n(t)+2q(t)\,u_n(t)-$$

$$-p(t)\sum_{j=0}^{n}u_j(t)\,u_{n-j}(t)-\sum_{j=1}^{n}u_j(t)\,u_{n+1-j}(t)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^{-\nu}p(t)\sum_{j=\nu}^{n}u_j(t)\,u_{n+\nu-j}(t)-\sum_{\nu=2}^{n}\lambda^{-\nu+1}\sum_{j=\nu}^{n}u_j(t)u_{n+\nu-1-j}(t)\Big]. \tag{4}$$

Указанное преобразование имеет смысл при $\lambda>\lambda_0$, где λ_0 — наибольшее из положительных вещественных значений, приобретаемых в интервале $[0;a]$ корнями алгебраического уравнения $\mathrm{Im}\,u(t,\lambda)=0$ $(\lambda_0<\infty)$. При $\lambda>\lambda_0$ $\mathrm{Im}\,u(t,\lambda)\neq 0$ в $[0;a]$. Из (4) нетрудно заметить, что функция $r(t,\lambda)$ может быть представлена в виде ряда $\sum_{\nu}\lambda^{-\nu}r_\nu(t)$ при $\lambda>\lambda_0$.

Причем

$$r_0(t) = (2i)^{-1} \left[\frac{d}{dt} u_n(t) + 2q(t)\, u_n(t) - \right.$$

$$\left. - p(t) \sum_{j=0}^{n} u_j(t) - u_{n-j}(t) - \sum_{j=1}^{n} u_j(t)\, u_{n+1-j}(t) \right]. \qquad (5)$$

В силу условий 2) из (5) следует, что функция $r_0(t)$ суммируема в интервале $[0,a]$.

Далее, построим фундаментальную матрицу $X(t,\lambda)$ системы (2) с начальным условием $X(0,\lambda)=E$ и для матрицы монодромии $X(a,\lambda)$ системы (2) имеем:

$$X(a,\lambda) = \exp \left[\int_0^a \Lambda(t,\lambda)\, dt \right] \left[E + \lambda^{-n} \int_0^a K(t,\lambda)\, dt + \right.$$

$$\left. + \lambda^{-2n} \int_0^a K(t,\lambda)\, dt \int_0^t K(\tau,\lambda)\, d\tau + \ldots \right],$$

где $\Lambda(t,\lambda)$ есть матрица (3),

$$K(t,\lambda) = \exp \left[- \int_0^t \Lambda(\tau,\lambda)\, d\tau \right] R(t,\lambda) \exp \left[\int_0^t \Lambda(\tau,\lambda)\, d\tau \right].$$

Матрицы $Y(a,\lambda)$ и $X(a,y)$ подобны, следовательно $\operatorname{sp} Y(a,\lambda) = \operatorname{sp} X(a,\lambda)$. Поэтому $F(\lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{sp} X(a,\lambda)$. Лакуны определяются из соотношения $|F(\lambda)| \geqslant 1$. Решив уравнение $|F(\lambda)|=1$, получаем для краев лакун две последовательности

$$\lambda_k';\ \lambda_k'' = \frac{\pi k}{a} + \sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu k^{-\nu} + \frac{a^n}{\pi^n k^n} \left\{ \int_0^a \left[p(t) \operatorname{Im} u_n(t) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{Im} r_0(t) \right] dt \mp \left| \int_0^a r_0(t) \exp\left(\frac{2\pi k i}{a} t \right) dt \right| \right\} +$$

$$+ O(k^{-n-1}), \qquad (6)$$

где коэффициенты $c_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ определяются непосредственно при решении уравнения $|F(\lambda)|=1$. Ввиду того, что $\Delta_k = \lambda_k'' - \lambda_k'$, из (6) приходим к формуле

$$\Delta_k = \frac{2a^n}{\pi^n k^n} \left| \int_0^a r_0(t) \exp\left(\frac{2\pi k i}{a} t \right) dt \right| + O(k^{-n-1}). \qquad (7)$$

В частности, при $n = 1$, т. е. когда матрица-функция $A(t)$ в системе (1) абсолютно непрерывна, в интервале $[0;a]$ имеем

$$\Delta_k = \frac{2a}{\pi k}\left|\int\limits_0^a r_0(t)\exp\left(\frac{2\pi k i}{a}\, t\right)dt\right| + O(k^{-2}), \quad (k\to\infty)$$

где

$$r_0(t) = \frac{1}{2}\,\frac{dp(t)}{dt} + p(t)q(t) + \frac{i}{2}\left|\frac{dq(t)}{dt} + q^2(t) - p^2(t)\right|.$$

Итак, справедлива следующая

Теорема. *Пусть для системы* (1) *условия* 1) *и* 2) *выполнены. Тогда для ширины k-ой лакуны* Δ_k *спектра оператора одномерной периодической системы Дирака L справедлива асимптотическая формула* (7), *а для краев лакун—формула* (6).

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического
института им. К. Маркса

Ս. Դ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Լ. Ա. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Ողորկ և պարբերական պոտենցիալով Դիրակի միաչափ օպերատորի սպեկտրի լակունների մասին

Դիտարկվում է իրական գործակիցներով Դիրակի պարբերական և միաչափ համակարգը։ Ենթադրվում է, որ համակարգի պոտենցիալ $A(t)$ *մատրիցայի* $A^{(n-1)}(t)$ $(\forall n \geqslant 1$, *n-ը ֆիքսված ամբողջ թիվ է) ածանցյալը բացարձակ անընդհատ է* $[0;a]$ *հատվածում (a-ն պոտենցիալի պարբերությունն է)։ Ապացուցվում է, որ քննարկվող օպերատորի սպեկտրի k—րդ լակունի* Δ_k *լայնության համար ճիշտ է հետևյալ ասիմպտոտիկ գնահատականը* $(k\to\infty)$

$$\Delta_k = 2a\,\pi^{-n}k^{-n}\left|\int\limits_0^a r_0(t)\exp\left(\frac{2\pi k i}{a}\, t\right)dt\right| + O(k^{-n-1}),$$

որտեղ $r_0(t)$ *ֆունկցիան արտահայտվում է* $A(t)$ *մատրիցայի էլեմենտներով և նրանց՝ մինչև n—րդ կարգի հաջորդական ածանցյալներով։ Հոդվածում ստացվել են նաև k—րդ լակունի ծայրակետերի համար ասիմպտոտիկ բանաձևեր (տես տեքստում* (6)*—ը)։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. Маклеуд* (R. Macleod), Some problems in the thery ob eigenfunctions, Thesis, Oxford. 1966 [2] *Х. М. Мкоян*, Сборник материалов X конференции ЕрПИ Ленинаканского филиала, серия физ-мат наук, 92—102 1976. [3] *И. М. Рапопорт*, ДАН СССР, т. 73. № 5, 889-890 (1950). [4] *H. Hochstadt*, Proc Amer Math. Soc., 14, № 6 930—932 (1963). [5] *H. Hochstadt*, Com. Appl. Math., vol XVII, 251—255, (1964). [6] *С. Г. Симонян*, Дифференц. уравнения, т. XVI, № 7, 1266—1272 (1970). [7] *С. Г. Симонян*, ДАН Арм. ССР, т. LI, №4 (1970). [8] *С. Г. Симонян, М. Ф. Федорюк*, „Известия АН Арм. ССР, математика", т XI, №5 (1976). [9] *В. Ф. Лазуткин, Т. Ф. Панкратов*, ДАН СССР, т. 215, № 5 (1974). [10] *Е. И. Динабург, Я. Г. Синай*, Функциональный анализ, т. 9, вып. 4 (1975) [11] *В. А. Еровенко*, Дифференц. уравнения, т. XI, № 10 (1975). [12] *Х. М. Мкоян*, ДАН Арм. ССР, т. LX, № 4 (1975).