ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 4

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

О сходимости двойных рядов в метрике $L^p[0,1]\times[0,1]$, $0<p<1$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 8/II 1979)

1. В 1922 г. А. Н. Колмогоровым ([1]) было доказано существование суммируемой на $[0, 2\pi]$ функции, ряд Фурье которой по тригонометрической системе расходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Вместе с тем имеет место следующая

Теорема А (Д. Е. Меньшов ([2])). *Пусть $f(x)$—любая суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция и Q—любое совершенное нигде не плотное множество на $[0, 2\pi]$. Тогда можно найти такую суммируемую функцию $g(x)$, что*

$$g(x)=f(x) \text{ на } Q$$

и ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится почти всюду.

Далее, Марцинкевич ([3], стр. 358—364) доказал, что существуют функция $f_0(x)\in L^p[0, \pi]$, для всех p, $1\leq p<6/5$ и перестановка натуральных чисел $\{\nu(k)\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что любая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f_0(x)$, по системе $\{\cos\nu(k)x\}_{k=1}^{\infty}$ расходится почти всюду на $[0, \pi]$.

В связи с этим естественно поставить следующий вопрос: возможно ли любую суммируемую функцию изменить вне заданного нигде не плотного множества Q так, чтобы некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье вновь полученной функции $F(x)$ по системе $\{\cos\nu(k)x\}_{k=1}^{\infty}$ сходилась почти всюду на $[0, \pi]$? Положительный ответ на этот вопрос получается из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$—полная в $L^2[0,1]$, ортонормированная система функций, каждая из которых может иметь лишь конечное число точек разрыва. Тогда для любого совершенного нигде не плотного множества Q и любой суммируемой функции $f(x)$, существует суммируемая функция $F(x)$, такая, что $F(x)=$*

$=f(x)$ *на* Q *и некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье функции* $F(x)$, *по системе* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходилась к ней почти всюду и в метрике* $L^1[0, 1]$.

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть функции* $f(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$ *определены на отрезке* Δ, *причем каждая из них имеет лишь конечное число точек разрыва.*

Тогда для любого совершенного нигде не плотного множества $Q \subset \Delta$ *существует ограниченная функция* $F(x)$ *такая, что*

1) $F(x)=f(x)$ на Q,

2) $\int\limits_{\Delta} F(x) \cdot \varphi_k(x)dx=0$ при $k=1, 2, \ldots, N$,

3) $\int\limits_{\Delta}|F(x)|dx \leqslant 3 \int\limits_{\Delta}|f(x)|dx$.

II. Как известно, до сих пор остается нерешенной следующая задача: сходится ли в метрике L^p, $0<p<1$, или хотя бы по мере, двойной ряд Фурье любой суммируемой функции ([4], стр. 34).

В связи с этим естественно рассматривать вопрос о сходимости двойных рядов Фурье суммируемых функций $f(x, y)$ в зависимости от изменения их значений вне заданного совершенного нигде не плотного множества. Неизвестно, верен ли аналог теоремы A для двойных рядов сходимости почти всюду (по Прингсхейму по сферам или же по квадратам).

Тем не менее, рассматривая аналогичный вопрос при требовании сходимости в метрике L^p, $0<p<1$, двойного ряда, можно установить следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть* Q_i, $Q_i \subset [0, 2\pi]$, $i=1, 2$, *совершенные нигде не плотные множества.*

Тогда для любой суммируемой на $T=[0, 2\pi]\times[0, 2\pi]$ *функции* $f(x, y)$ *можно определить суммируемую на* T *функцию* $F(x, y)$ *такую, что*

$$F(x, y)=f(x, y) \text{ на } Q=Q_1 \times Q_2$$

двойной ряд Фурье функции $F(x, y)$ *сходится к ней по Прингсхейму в метрике* $L^p[T]$, $0<p<1$, *т. е.*

$$\lim_{n, m\to\infty} \| S_{nm}[F]-F(x, y) \|_p = 0, \; 0<p<1,$$

где $S_{nm}[F]$ *прямоугольные частичные суммы двойного ряда Фурье функции* $F(x, y)$.

Теорема 3. *Пусть* $f(x, y)$ — *любая суммируемая функция и* $Q \subset T=[0, 2\pi]\times[0, 2\pi]$ — *любое совершенное нигде не плотное множество. Тогда можно определить суммируемую функцию* $F(x, y)$ *такую, что* $F(x, y)=f(x, y)$ *на* Q *и двойной ряд Фурье функции* $F(x, y)$ *сходится к ней по квадратам в метрике* $L^p[T]$, $0<p<1$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \| S_{nn}[F] - F(x, y) \|_p = 0, \ 0<p<1,$$

где $S_{nn}[F]$ — квадратичные частные суммы двойного ряда Фурье функции $F(x, y)$.

При доказательстве теоремы 2 используется лемма 1. Основным средством для доказательства теоремы 3 является следующая

Лемма 2. *Пусть даны квадрат $\Delta = [a, b] \times [c, d] \subset T$, совершенное нигде не плотное множество $Q \subset \Delta$, натуральное число N, действительное число $\gamma \neq 0$ и положительное число $\varepsilon > 0$.*

Тогда существует ограниченная функция $\varphi(x, y)$ такая, что

$$1) \ \varphi(x, y) = \begin{cases} \gamma & \text{при } (x, y) \in Q \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin \Delta \end{cases}$$

$$2) \ \iint_{\Delta} |\varphi(x, y)| dx dy \leq 2 \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|$$

$$3) \ |S_{nm}[\varphi]| \leq \varepsilon; \ n, m \leq N; \ (x, y) \in T$$

$$4) \ \iint_{\Delta} |S_{nm}[\varphi]|^p dx dy \leq A(p) \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|, \ 0<p<1, \ n, m = 1, 2 \ldots$$

где $A(p)$ — константа, зависящая только от p.

Хотя неизвестно, сходится ли двойной ряд Фурье суммируемой функции в метрике L^p, $0<p<1$, но тем не менее оказывается, что функции пространства $L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $0<p<1$ представляются двойными тригонометрическими рядами.

Более того справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^q[0, 1]$, $q \geq 1$. Тогда для любой функции $f(x, y) \in L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $0<p<1$ существует ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \varphi_k(x) \cdot \varphi_l(y),$$

который сходится к $f(x, y)$ в метрике $L^p[0, 1] \times [0, 1]$, $0<p<1$ по Прингсхейму, т. е.

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k,l=1}^{nm} a_{kl} \varphi_k(x) \varphi_l(y) - f(x, y) \right|^p dx dy = 0, \ 0<p<1.$$

Эта теорема является двумерным аналогом теоремы А. А. Талаляна ([5]).

III. В работе ([6]) А. А. Талаляном была установлена следующая

Теорема В *(А. А. Талалян). Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G \subset [0,1]$ и образующих нормированный базис в пространстве $L^p(G)$, $p>1$. Тогда для любой измеримой функции $F(x)$, определенной на множестве G, существует ряд*

$$\sum a_n \varphi_n(x) \ (a_n \text{— действительные числа}),$$

обладающий следующими свойствами:

1) *если обозначить через* A *множество тех точек из* G, *где* $F(x)$ *конечна, то на множестве* A *ряд* (1) *асимптотически сходится к* $F(x)$ *в метрике* L^p, т. е. *для любого* $\varepsilon>0$ *существует множество* $A_\varepsilon\subset A$ такое, что $\mathrm{mes}A_\varepsilon>\mathrm{mes}A-\varepsilon$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{A_\varepsilon}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)-f(x)\right|^p dx=0$,

а на множестве $G\setminus A$ этот ряд *сходится к* $F(x)$ *по мере:*

2) $$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

Г. Гофман и Р. Зинг ([7]), опираясь на лемму 3 работы ([6]) А. А. Талаляна, доказали следующую теорему.

Теорема С. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *базис пространства* $L^p[0, 1]$, *для всех* $p, p>1$, $\inf\|\varphi_k\|_p>0$.

Тогда для любой измеримой функции $F(x, y)$, *определенной на* $[0, 1]\times[0, 1]$, *существует ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}a_{kl}\varphi_k(x)\varphi_l(y), \tag{2}$$

обладающий следующими свойствами:

1) *если обозначить через* E *множество тех точек из* $T=[0,1]\times[0,1]$, *где* $F(x, y)$ *конечна, то на множестве* E *ряд* (2) *асимптотически сходится к* $F(x, y)$ *в метрике* $L^1(T)$ *по Прингсхейму, а множестве* $T\setminus E$ *этот ряд сходится к* $F(x, y)$ *по мере*

2) $$\lim_{n,m\to\infty}a_{nm}=0.$$

Эта теорема не является полным двумерным аналогом теоремы В, так как в ее формулировке асимптотическая сходимость имеет место только в метрике L^1.

Основываясь на лемму 1 работы ([6]) А. А. Талаляна, можно доказать следующую теорему, являющуюся усилением теоремы С.

Теорема 5. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *есть нормированный базис пространства* $L^p(G)$, $p>1$, $G\subset[0, 1]$, $\mathrm{mes}G>0$.

Тогда для любой измеримой функции $F(x, y)$, *определенной на множестве* $G\times G$, *существует ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}C_{kl}\varphi_k(x)\varphi_l(y) \tag{3}$$

обладающий следующими свойствами:

1) *если обозначить через* E *множество тех точек из* $H=G\times G$, *где* $F(x, y)$ *конечна, то на* E *ряд* (3) *по Прингсхейму асимптотически сходится к* $F(x, y)$ *в метрике* $L^p(H)$, $p>1$, *а на* $H\setminus E$ *этот ряд сходится по мере*

2) $$\lim_{k,l\to\infty}c_{kl}=0.$$

З а м е ч а н и е. Теоремы 2 и 3 верны для n-кратных тригонометрических рядов, а также для кратных рядов по системе Уолша.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ереванский государственный университет

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Կրկնակի շարքերի $L^p[0,1]\times[0,1]$, $0<p<1$, մետրիկայով զուգամիտության մասին

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 1. Եթե $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$-ը, $L^2[0,1]$-ում լրիվ, բացի զույգն վերջավոր թվով խզման կետեր ունեցող, օրթոնորմալ ֆունկցիաների համակարգ է, ապա ցանկացած ինտեգրելի ֆունկցիա տրված ամենուրեք նոսր բազմությունից դուրս կարելի է փոխել այնպես, որ նոր ստացված ֆունկցիայի Ֆուրյեի շարքի (ըստ $\{\varphi_n(x)\}$ համակարգի) մասնակի գումարների որևէ ենթահաջորդականություն $L^1[0,1]$ մետրիկայով զուգամիտի իրեն:

Թեորեմ 2. Եթե $Q_i\subset[0,2\pi]$ $(i=1,2)$ և $Q\subset T=[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ ամենուրեք նոսր կատարյալ բազմություններ են, ապա ցանկացած $f(x,y)$ ինտեգրելի ֆունկցիայի համար կարելի է գտնել $F(x,y)$ և $q(x,y)$ ինտեգրելի ֆունկցիաներ, այնպես որ՝

1. $F(x,y)=f(x,y)$, երբ $(x,y)\in H-Q_1\times Q_2$; $q(x,y)=f(x,y)$, երբ $(x,y)\in Q$.

2. $$\lim_{mn\to\infty}\iint_T\left|S_{nm}[F]-F(x,y)\right|^p dxdy=0,\quad \lim_{n\to\infty}\iint_T\left|S_{nn}[q]-q(x,y)\right|^p dxdy=0,\ 0<p<1.$$

Թեորեմ 3. Եթե $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $L^p[0,1]$, $q>1$ տարածությունում բազիս է, ապա՝

1. $\{\varphi_k(x)\cdot\varphi_l(y)\}$ $(k,l=1,2\ldots)$ կրկնակի համակարգը հանդիսանում է $L^p[0,1]\times[0,1]$, $0<p<1$ տարածության համար ներկայացման համակարգ:

2. Համարյա ամենուրեք վերջավոր ցանկացած չափելի $f(x,y)$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $\sum a_{kl}\varphi_k(x)\varphi_l(y)$ շարքը, որը $L^p[0,1]\times[0,1]$, $p>1$ մետրիկայով ասիմպտոտիկ զուգամիտում է իրեն:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды. М., 1961 [2] *Д. М. Меньшов*, О рядах Фурье от суммируемых функций, ТММ, I, 5—58 (1952) [3] *С. Качмаж*, *Г. Штейнгауз*, Теория ортогональных рядов, 1958 [4] *Ш. А. Алимов*, *В. А. Ильин*, *Е. М. Никишин*, Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, УМН, т. XXXI, вып. 6(192) (1976) [5] *А. А. Талалян*, Представление функций классов $L^p[0,1]$, $0<p<1$ ортогональными рядами, Acta Mathematica Scientiarum Hungarical. Tomus 21 (1—2) 1—9, 1970 [6] *А. А. Талалян*, Представление измеримых функций рядами, УМН, т. XV, вып. 5(95), 1960 [7] *C. Coffman*, *R. Zink* „On the Representation of Measurable Functions by Multiple Series Associatel With a Certain Class of Schauder Bases“ Proc. London Math. Soc., 35, No. 3, 527—540, 1977.