

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Э. П. Меликсетян

**Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем
дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми
переменными**

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 7/II 1979)

Пусть D односвязная область, ограниченная аналитической кривой Γ . В работе рассматривается следующая задача.

Задача Дирихле. Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение слабо связанной эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$L(U) \equiv AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U = 0, \quad (1)$$

непрерывное в замкнутой области $D + \Gamma$ и удовлетворяющее граничному условию

$$U(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y), \quad (2)$$

где $A, B, C, a(x, y), b(x, y)$ и $c(x, y)$ вещественные квадратные матрицы n -го порядка, $f(x, y) = [f_1(x, y), \dots, f_n(x, y)]$, заданная на Γ вещественная вектор-функция, а $U(x, y) = [U_1(x, y), \dots, U_n(x, y)]$ — искомое решение.

Предполагается, что A, B и C — постоянные матрицы, $a(x, y) \in C_1^1(D + \Gamma)$, $b(x, y) \in C_1^1(D + \Gamma)$, $c(x, y) \in C_0(D + \Gamma)$, а вектор-функция $f(x, y) \in C(\Gamma)$.

Система (1) называется слабо связанной, если система

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0 \quad (3)$$

является слабо связанной.

Понятие слабой связанности системы (3) дано в монографии А. В. Бицадзе ⁽¹⁾.

В случае, когда $f(x, y) \in C_1^1(\Gamma)$, а решение $U(x, y)$ ищется в классе $C_1^1(D + \Gamma)$, задача (1) — (2) исследована в монографии ⁽¹⁾.

Наряду с задачей (1) — (2) рассмотрим также сопряженную однопородную задачу Дирихле.

Сопряженная задача Дирихле. Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$L^*(V) \equiv V_{xx}A + V_{xy}B + V_{yy}C - (V \cdot a(x, y))_x - (V \cdot b(x, y))_y + V \cdot c(x, y) = 0, \quad (4)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$V(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

где $V(x, y) = (V_1(x, y), \dots, V_n(x, y)) \in C^1(D + \Gamma)$.

В настоящей работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Числа линейно независимых решений однородной задачи (1)–(2) и (4)–(5) конечны и равны.

Теорема 2. Для разрешимости задачи (1)–(2) необходимо и достаточно, чтобы $f(x, y)$ удовлетворяло следующим условиям

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \hat{N}} [A \cos^2(\hat{N}, x) + B \cos(\hat{N}, x) \cdot \cos(\hat{N}, y) + C \cos^2(\hat{N}, y)] f(x, y) ds = 0, \quad (6)$$

где $\varphi_j(x, y)$, $(j = 1, \dots, m)$ линейно независимые решения задачи (4)–(5), а $\frac{\partial \varphi_j}{\partial \hat{N}}$ производные по нормали.

Теорема 3. Если выполнены условия (6), то частное решение задачи (1)–(2) дается формулой

$$U(x, y) = \int_{\Gamma} K(z, t) f(t) dt, \quad z = x + iy, \quad t = \xi + i\eta, \quad (7)$$

где $K(z, t)$ – некоторая квадратная матрица порядка n , причем $U(x, y)$ и элементы k_{ij} матрицы $K(z, t)$ удовлетворяют оценкам

$$|U(x, y)| = \left| \int_{\Gamma} K(z, t) f(t) dt \right| \leq c_0 \max_{t \in \Gamma} |f(t)| \quad (8)$$

и

$$|k_{ij}(z, t)| \leq \frac{c_1}{|z - t|}, \quad (9)$$

В случае, когда $f(x, y) \in C^1_*(\Gamma)$ и решение задачи (1)–(2), $U(x, y)$ ищется в классе $C^1_*(D + \Gamma)$, теоремы 1 и 2 получены в работах (1) и (2). В этих работах задача (1)–(2) приведена к сингулярному интегральному уравнению нормального типа в классах Гёльдера.

В наших предположениях не удастся задачу (1)–(2) непосредственно привести к сингулярным интегральным уравнениям. Исследования проводятся по следующей схеме.

Пусть $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$. В предположении, когда $f(x, y) \in C^2(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (6) по методам (1) и (2), строится некоторое частное решение, которое удовлетворяет оценке

(8). В дальнейшем, используя оценку (8), доказывается, что условие (6) является необходимым и достаточным для разрешимости задачи (1)–(2), при этом построенное решение является частным решением и в том случае, когда $f(x, y) \in C(\Gamma)$. Общий случай доказательства теорем (1)–(3) приводится к этому случаю следующим образом.

Обозначим через $L_0(V)$ и $L_1(V)$ операторы

$$L_0(V) \equiv AV_{xx} + BV_{xy} + CV_{yy}, \quad (10)$$

$$L_1(V) \equiv a(x, y)V_x + b(x, y)V_y + c(x, y)V, \quad (11)$$

где $V(x, y) = [v_1(x, y), \dots, v_n(x, y)]$.

Ясно, что систему (1) можно написать в виде

$$L_0(U) + L_1(U) = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим уравнение

$$L_0(W(x, y)) = g(x, y), \quad (13)$$

где $g(x, y)$ непрерывна в $D + \Gamma$ и удовлетворяет условию Гельдера в любой подобласти D_0 области D , а $W(x, y) = [W_1(x, y), \dots, W_n(x, y)]$ — искомое решение.

Пусть $\varphi(x, y)$ квадратная матрица n -го порядка, являющаяся фундаментальным решением системы (13). Тогда частное решение системы (13) дается формулой (см. (2))

$$W(x, y) = \iint_D \varphi(x - \xi, y - \eta) g(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (14)$$

В классе $C^2(D) \cap C(D + \Gamma)$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} M(U) \equiv \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\varphi(x - \xi, y - \eta) a(\xi, \eta)) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\varphi(x - \xi, y - \eta) b(\xi, \eta)) - \right. \\ \left. - \varphi(x - \xi, y - \eta) c(\xi, \eta) \right] U(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\begin{aligned} &= \iint_D \varphi(x - \xi, y - \eta) \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) U(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta = \\ &= - \int_{\Gamma} \varphi(x - \xi, y - \eta) [a(\xi, \eta) \cos(\hat{N}, \hat{\xi}) + b(\xi, \eta) \cos(\hat{N}, \hat{\eta})] U(\xi, \eta) ds + M(U), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\hat{N}$ — внешняя нормаль к границе Γ в точке интегрирования (ξ, η) .

Ясно, что контурный интеграл в правой части (16) в области D удовлетворяет уравнению $L_0(V) = 0$, а левая часть, согласно формуле (14), удовлетворяет уравнению

$$L_0(V) = g(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (17)$$

где

$$g(x, y) = -a(x, y)U_x - b(x, y)U_y - c(x, y)U(x, y) = -L_1(U). \quad (18)$$

Следовательно, применяя к обеим частям (16) оператор L_0 , получим

$$-L_1(U(x, y)) = L_0(M(U)), \quad (x, y) \in D. \quad (19)$$

Согласно соотношению (19) систему (12) (т. е. систему (1)) можно написать в виде

$$L_0(U - M(U)) = 0. \quad (20)$$

Отсюда получим

$$U - M(U) = V(x, y), \quad (21)$$

где $V(x, y) = [v_1(x, y), \dots, v_n(x, y)]$ является решением однородной системы

$$AV_{xx} + BV_{xy} + GV_{yy} = 0. \quad (22)$$

Так как $U(x, y)$ принадлежит классу $C^2(D) \cap C(D + \Gamma)$, то из (21) следует, что $V(x, y)$ также принадлежит этому классу.

Учитывая равенство (21), граничное условие (2) можно написать в виде

$$V(x, y) = f(x, y) - M(U(x, y)) \text{ при } (x, y) \in \Gamma. \quad (23)$$

Так как $f(x, y) \in C(\Gamma)$ и $U(x, y) \in C^2(D) \cap C(D + \Gamma)$, то правая часть (23) принадлежит классу $C(\Gamma)$. Решим задачу (22) — (23) относительно вектор-функции $V(x, y)$. Используя теоремы 2 и 3 при $a(x, y) = b(x, y) = c(x, y) = 0$, имеем, что задача (22) — (23) относительно $V(x, y)$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma} [f(x, y) - M(U(x, y))] \psi_j(x, y) ds = 0, \quad (j = 1, \dots, m), \quad (24)$$

где $\psi_j(x, y)$ — некоторые n -мерные вектор-функции из класса $C(\Gamma)$. Если выполнены условия (24), то решение задачи (22) — (23) дается формулой

$$V(x, y) = \int_{\Gamma} K(z, \zeta) (f(\zeta) - M(U)) ds + \sum_{j=1}^m c_j v_j(x, y), \quad (25)$$

где $K(z, \zeta)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая квадратная матрица n -го порядка при $(x, y) \in D$ и $\zeta \in \Gamma$; $v_1, \dots, v_m$ линейно независимые решения однородной задачи $L_0(V) = 0$ в D , $V(x, y)|_{\Gamma} = 0$, а $c_1, \dots, c_m$ произвольные действительные постоянные. Подставляя значение $V(x, y)$ из (25) в (21), получим

$$U(x, y) = M(U) - \int_{\Gamma} K(z, \zeta) M(U) ds + \int_{\Gamma} K(z, \zeta) f(\zeta) ds + \sum_{j=1}^m c_j v_j(x, y) \quad (x, y) \in D. \quad (26)$$

Из (15) и (9) следует, что уравнение (26) можно написать в виде

$$U(x, y) = \int_D \int K_0(z, \zeta) U(\zeta) d\zeta d\eta + \int_{\Gamma} K(z, \zeta) f(\zeta) ds + \sum_{j=1}^m c_j v_j(x, y), \quad (27)$$

где $K_0(z, \zeta)$ некоторая квадратная матрица n -го порядка, элементы которой, дважды непрерывно дифференцируемые по z , при $z \neq \zeta$ и удовлетворяют оценке (9).

Ясно, что задача (1)–(2) эквивалентна уравнению (27) с условиями (24). Легко показать, что любое решение уравнения (27) в классе $C(D+\Gamma)$ внутри области D дважды дифференцируемо, поэтому уравнение (27) можно решить в классе $C(D+\Gamma)$. Уравнение (27) относительно вектор-функции $U(x, y)$ в классе $C(D+\Gamma)$ является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Решая уравнение Фредгольма (27) с условиями (24), тем самым получим решение задачи (1)–(2) и утверждение теоремы (1)–(3).

В заключение выражаю глубокую признательность моему научному руководителю, Н. Е. Товмасыну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Է. Պ. ՈՆԼԻՔՈՆԻԱՆ.

Դիֆֆուզիայի խնդիրը բույլ կապակցված, երկրորդ կարգի երկու անկախ փոփոխականներով էլիպտիկ դիֆերենցիալ հսկայապարամետրի համակարգի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը. գտնել միակապ D տիրույթում, որը սահմանափակված է Γ անալիտիկ կորով $L(U) \equiv AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + a(x, y)U_x + b(x, y)U_y + c(x, y)U(x, y) = 0$ էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի $U(x, y)$ լուծումը, որը բավարարում է $U(x, y)/r = f(x, y)$ եզրային պայմանին, որտեղ A, B, C — հաստատուն, իսկ $a(x, y), b(x, y)$ և $c(x, y)$ n -րդ կարգի քառակուսի մատրիցներ են, ընդ որում՝ $a(x, y), b(x, y) \in C_1^1(D+\Gamma), c(x, y) \in C_0(D+\Gamma), f(x, y) \in C(\Gamma), U(x, y) \in C^2(D) \cap C(D+\Gamma)$:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ ՈՒ Ն

- ¹ А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Изд. «Наука», М., 1966. ² Н. Е. Товмасын, Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка, не удовлетворяющих условию Я. Б. Лопатинского, С. М. III, т. VII, № 4 (1966).