

УДК 512

МАТЕМАТИКА

Г. Г. Эмин

Конечнобазируемые многообразия и локализации в категории модулей над всеми кольцами

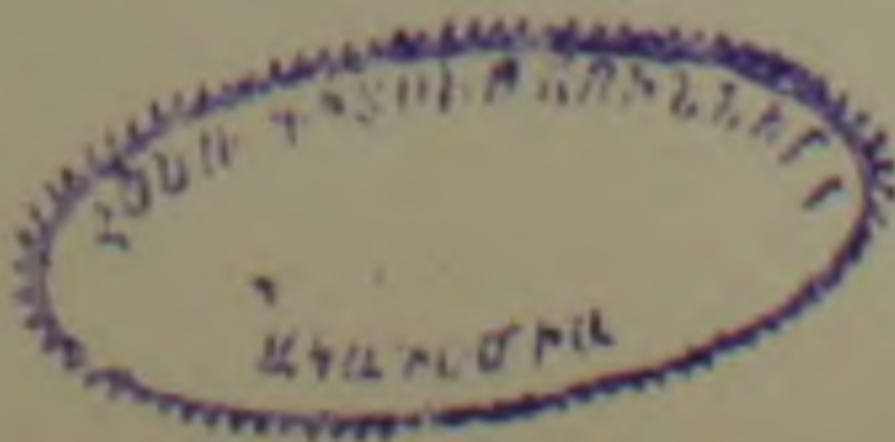
(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 10/XII 1978)

Рассматривается категория MOD , категория модулей над всеми кольцами. Объекты этой категории — всевозможные пары (A, U) , где U — ассоциативное кольцо не обязательно с единицей, A — правый U -модуль. Множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар (φ_A, φ_U) , где φ_A — гомоморфизм абелевой группы A в абелеву группу B , а φ_U — гомоморфизм кольца U в кольцо V , причем $(a \cdot u) \varphi_A = a \varphi_A \cdot u \varphi_U$, $a \in A$, $u \in U$.

Зафиксируем тройку вида (n, T, T') , где n — натуральное число или нуль, а T и T' — многообразия категории ассоциативных колец As , удовлетворяющие условию $T' \subseteq T \cap T(n)$, где $T(n)$ — многообразие категории As с одним тождеством $nx=0$. Обозначим через $N(n, T, T')$ полную подкатегорию категории MOD , порожденную всеми теми модулями (A, U) , для которых выполнены условия $na=0$, для любого $a \in A$, кольцо $U \in T$ и $a \cdot u=0$, для любого $a \in A$ и для любого $u \in V_{T'}(U)$, где $V_{T'}(U)$ — значение вербала многообразия T' на кольце U . $N(n, T, T')$ — это многообразие категории MOD , и для любого многообразия N категории MOD существует такая единственная тройка (n, T, T') , что $N=N(n, T, T')$ ⁽¹⁾.

Пусть $N=N(n, T, T')$ — многообразие категории MOD , а $(A(X), U(Y))$ — свободный модуль с системой свободных образующих (X, Y) , где X и Y — счетные множества ⁽¹⁾, стр. 215). Значение вербала V_N на модуле $(A(X), U(Y))$ равно $(nA(X) + A(X) \cdot V_{T'}(U(Y)), V_{T'}(U(Y)))$ ⁽¹⁾, предложение 2.5), поэтому многообразие N состоит из всех таких модулей (A, U) , что в кольце U выполнены тождества многообразия колец T , а в модуле (A, U) выполнены тождество $nx=0$ и битождества ⁽²⁾, стр. 103) $a \cdot u=0$, где $a \in A(X)$ и $u \in V_{T'}(U(Y))$.

Многообразие будем называть конечнобазируемым, если его можно задать конечным числом тождеств и битождеств. Конечнобазируемое многообразие будем называть шпехтовым, если каждое его подмногообразие конечнобазируемо.



Лемма 1.1. Многообразие $N(n_1, T_1, T_1)$ тогда и только тогда является подмногообразием многообразия $N(n_2, T_2, T_2)$, когда n_1 — делитель n_2 , или $n_2=0$, $T_1 \subseteq T_2$ и $T_1' \subseteq T_2'$.

Теорема 1.1. Многообразие $N(n, T, T')$ категории MOD тогда и только тогда шпехтово, когда T — шпехтово многообразие категории ассоциативных колец.

Доказательство. Пусть T — шпехтово многообразие. Тогда подмногообразие T' многообразия T также шпехтово, т. е. его можно задать конечным числом тождеств. Получили, что $N(n, T, T')$ — конечно-базлируемое многообразие, так как из конечнобазлируемости многообразия T' следует, что идеал $V_T(U(Y))$ задается как вербальный идеал конечным числом элементов $u_1 = u_1(y_1, \dots, y_{n_1}), \dots, u_l = u_l(y_1, \dots, y_{n_l})$, поэтому тождества $a \cdot u = 0, a \in A(X), u \in V_T(U(Y))$, вытекают из тождества $a \cdot u_i = 0, i = 1, \dots, l$. Из сказанного выше и из леммы 1.1, поскольку T и T' — шпехтовы многообразия, следует, что любое подмногообразие многообразия $N(n, T, T')$ также конечнобазлируемо.

Обратно. Если многообразие $N(n, T, T')$ шпехтово, то его подмногообразие $N(1, T, T(1)) = \{(0, U) | U \in T\}$ также шпехтово. Теорема доказана.

Модуль (A, U) будем называть конечным модулем, если A — конечная абелева группа и U — конечное кольцо.

Модуль называется локально-конечным, если все его конечно-порожденные подмодули конечны.

Лемма 1.2. Модуль (A, U) тогда и только тогда локально-конечен, когда A — локально-конечная абелева группа и U — локально-конечное кольцо.

Многообразие категории MOD будем называть локально-конечным, если все его элементы являются локально-конечными модулями.

Модуль (A, U) будем называть критическим модулем, если он конечен и не лежит в многообразии, порожденном своими собственными подмодулями и собственными гомоморфными образами.

Многообразие категории MOD будем называть кроссовым, если оно локально-конечно, конечнобазлируемо и в нем существует только конечное число неизоморфных критических модулей.

Аналогично тому, как это делается в работе (1) для случая ассоциативных колец, можно доказать следующие предложения:

Предложение 1.1. Каждое кроссово многообразие категории MOD шпехтово. Подмногообразие кроссова многообразия кроссово.

Предложение 1.2. Локально-конечное многообразие категории MOD тогда и только тогда имеет только конечное число подмногообразий, когда оно имеет только конечное число неизоморфных критических модулей.

Предложение 1.3. Каждое локально-конечное многообразие категории MOD порождается своими критическими модулями.

Теорема 1.2. Многообразие $N(n, T, T')$ категории MOD тогда и только тогда кроссово, когда $n \neq 0$ и T —кроссово многообразие категории As .

Доказательство. Если многообразие $N(n, T, T')$ —кроссово, то его подмногообразия $N(n, T(1), T(1))$ и $N(1, T, T(1))$ также кроссовы.

Обратно. Пусть $n \neq 0$ и T —кроссово многообразие. С помощью леммы 1.2 легко проверить, что $N(n, T, T')$ —локально-конечное многообразие. Далее, так как T —кроссово, следовательно шпехтово многообразие категории As , то в силу теоремы 1.1, $N(n, T, T')$ —конечнобазлируемое многообразие.

Многообразие T —кроссово, следовательно, в силу теоремы 2.3 работы (3), оно имеет только конечное число подмногообразий. То же самое можно сказать и о подмногообразии T' многообразия T . Из леммы 1.1 следует, что многообразие $N(n, T, T')$ имеет только конечное число подмногообразий. Значит, в силу предложения 1.2, многообразие $N(n, T, T')$ имеет только конечное число неизоморфных критических модулей. Теорема доказана.

Используя лемму 1.1, теорему 1.2 и теоремы 2.3 и 2.4 работы (3), можно доказать следующие две теоремы:

Теорема 1.3 Многообразие категории MOD тогда и только тогда кроссово, когда оно содержит только конечное число подмногообразий.

Теорема 1.4. Многообразие категории MOD тогда и только тогда кроссово, когда решетка его подмногообразий удовлетворяет условию максимальности.

Теорема 1.5. Многообразие категории MOD тогда и только тогда кроссово, когда оно порождается одним конечным модулем.

Доказательство. Пусть $\text{Var}(A, U) = N(n, T, T')$ —многообразие категории MOD , порожденное конечным модулем (A, U) . Известно (2), что $\text{Var}(A, U) = QSC(A, U)$, где C —оператор взятия всех прямых произведений, S —оператор взятия всех подмодулей, Q —оператор взятия всех гомоморфных образов и QSC означает, что сначала применяем оператор C , затем S , а потом Q . Очевидно, что $\text{Var}(O, U) = N(1, T, T(1))$, где $T = \text{Var}(U)$ —многообразие категории As , порожденное кольцом U . Так как модуль (O, U) как подмодуль модуля (A, U) принадлежит многообразию $\text{Var}(A, U)$, то $\text{Var}(O, U) \subseteq \text{Var}(A, U)$. Значит, $\hat{T} \subseteq T$. Обратно, пусть кольцо $W \in T$. Тогда модуль $(O, W) \in N(n, T, T') = \text{Var}(A, U) = QSC(A, U)$, следовательно, модуль $(O, W) \in QSC(O, U) = \text{Var}(O, U)$. Значит, кольцо $W \in \hat{T}$, поэтому $T = \hat{T} = \text{Var}(U)$. Из теоремы 2.5 работы (3) следует, что $\text{Var}(U)$ —кроссово многообразие категории As . Кроме того, $n \neq 0$, так как из того, что A —конечная абелева группа, следует, что существует такое наименьшее натуральное число n , что $na = 0$, для любого $a \in A$.

Обратно. Каждое кроссово многообразие порождается своими критическими модулями. Значит, оно порождается прямым произведением своих критических модулей, то есть одним конечным модулем. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2, теоремы 3.1 работы (1) и теоремы 2.3 работы (1) следует

Теорема 1.6. *Произведение двух кроссовых многообразий категории MOD является кроссовым многообразием этой категории.*

Многообразие называется почти кроссовым, если оно не является кроссовым, но каждое его собственное подмногообразие кроссово.

Теорема 1.7. *Многообразие $N(n, T, T')$ тогда и только тогда почти кроссово, когда или $n=0$ и $T=T'=T(1)$, или же $n=1$, следовательно $T'=T(1)$ и T —почти кроссово многообразие категории As.*

Категория MOD не является абелевой категорией, поэтому понятие подкатегории локализации используется в том виде, как оно было определено в работе (5). Стюарт (6) доказал, что в категории As нет нетривиальных подкатегорий локализаций в смысле Е. Г. Шульгейфера.

Теорема 1.8. *В категории MOD имеется лишь одна нетривиальная подкатегория локализации, состоящая из всех модулей вида $(A, 0)$.*

Радикал R , в смысле А. Г. Куроша (7), категории ассоциативных колец называется строгим радикалом, если для любого ассоциативного кольца U любое R -подкольцо кольца U содержится в R -радикале $R(U)$.

Пользуясь теоремой 2.1 работы (6), можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.9. *Совокупность всех строгих радикалов категории ассоциативных колец не является множеством.*

Следствие. *Совокупность всех строгих радикалов категории MOD не является множеством.*

Автор благодарен М. Ш. Цаленко за руководство работой.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Գ. Գ. ԷՄԻՆ

Վերջավոր բազմությունից բաղաձևություններ և լոկալիզացիաները
բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում

Դիտարկվում է MOD կատեգորիան, որի օբյեկտները, բոլոր (A, U) զույգերն են (U —ն ասոցիատիվ օղակ է, A —ն աջ U —մոդուլ), իսկ մորֆիզմները, բոլոր ախպիսի (φ_A, φ_U) հոմոմորֆիզմների զույգերն են, որ $(a \cdot u)\varphi_A = a\varphi_A \cdot u\varphi_U$, $a \in A$, $u \in U$.

Նկարագրված են այդ կատեգորիայի կրոսյան, շպեխտյան և համարյա կրոսյան բազմաձևությունները: Որպեսզի բազմաձևությունը լինի կրոսյան, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա ծնված լինի մեկ հատ վերջավոր մոդուլից: Ապացուցված է, որ MOD կատեգորիայում գոյություն ունի միայն մեկ ոչ տրիվիալ լոկալիզացիայի ենթակատեգորիա: Այն բազմաձևացած է բոլոր (A, O) տեսքի մոդուլներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ր Յ ՈՒ Ն

- ¹ Г. Г. Эмин, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., IX, № 3, 212—235 (1974). ² Б. И. Плоткин, Латв. матем. ежегодник, 10, 75—132 (1972). ³ И. В. Львов, Алгебра и логика, 12, № 3, 269—297 (1973). ⁴ И. В. Львов, Алгебра и логика, 12, № 6, 667—688 (1973). ⁵ Е. Г. Шультгейфер, Труды ММО, 19, 271—301 (1968). ⁶ Farick N. Stewart, Proc. Amer. Math. Soc., 39, № 2, 273—278 (1973). ⁷ А. Г. Курош, Матем. сб., 33, № 1, 13—26 (1953).