ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 3

УДК 523.035

АСТРОФИЗИКА

А. Г. Никогосян

Диффузное отражение света от полубесконечной атмосферы при законе перераспределения $r_{II}(x', x, \gamma)$

(Представлено академиком АН Армянской ССР В. А. Амбарцумяном 9/XI 1978)

Возможность представления функции перераспределения по частотам в виде билинейного разложения по некоторой системе функций, как было показано в работах ([1-4]), может явиться основой для разработки методов решения задач переноса излучения в спектральной линии в общем случае некогерентного рассеяния. Один из этих методов заключается в применении принципа инвариантности, при котором вопрос сводится к решению бесконечной системы функциональных уравнений для φ-функций, являющихся аналогом функции В. А. Амбарцумяна $\varphi(\eta)$, хорошо известной из теории монохроматического рассеяния. В последних двух из упомянутых работ были предложены облегченные методы приближенного решения указанных бесконечных систем уравнений. Знание φ-функций решает задачу о диффузном отражении от полубесконечной среды, которая, в свою очередь, позволяет вычислить интенсивность излучения, выходящего из среды, содержащей источники энергии ([5]). Заметим также, что если в более ранних работах по теории некогерентного рассеяния обычно задавались целью выявить эффекты перераспределения излучения в линии по различным частотам и потому пользовались функцией перераспределения, усредненной по направлениям, то в работе ([4]) (см. также ([6])) были приведены билинейные разложения для соответствующих законов перераспределения по частотам и направлениям, что позволило распространить разработанные ранее методы и на этот более сложный случай.

Напомним вкратце часть результатов работы ([4]), которые понадобятся при дальнейшем изложении. Функция $r_{I}(x', x, \gamma)$, характеризующая чисто доплеровский закон перераспределения по частотам и направлениям, допускает разложение вида (отмечая тот или иной закон перераспределения, мы будем следовать общепринятым обозначениям)

$$r_{\rm I}(x', x, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sin\gamma}\exp\left\{-\frac{x^2+x'^2-2xx'\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\cos^k\gamma\,\alpha_k(x)\alpha_k(x'), \tag{1}$$

где x—безразмерная частота, γ—угол, заключенный между направлениями движения фотона до и после акта рассеяния; $\alpha_k(x) = (\pi^{1/4}2^{k/2}\sqrt{k!})^{-1}\exp(-x^2)H_k(x)$, причем $H_k(x)$—полином Эрмита k-й степени.

В частности, если усреднить $r_{\rm I}(x', x, \gamma)$ по всем направлениям, то придем к представлению, полученному еще Хаммером в работе ([1]):

$$r_{\rm I}(x', x) = \int\limits_{\max(|x|,|x'|)}^{\infty}\exp(-u^2)du = \sum_{k=0}^{\infty}A_k\,\alpha_{2k}(x)\,\alpha_{2k}(x'), \tag{2}$$

где $A_k = 1/(2k+1)$. Не будет лишним заметить, что функции $\alpha_k(x)$ являются собственными функциями ядра $r_{\rm I}(x', x, \gamma)/\alpha(x)$, соответствующими собственным значениям $\cos^{-k}\gamma$, при этом $\alpha(x)$—профиль коэффициента поглощения, равный здесь $\exp(-x^2)$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда функция перераспределения по частотам и направлениям имеет вид

$$r_{\rm III}(x', x, \gamma) = \frac{\sigma\,\mathrm{cosec}\,\gamma}{\pi^{3/2}U(0,\sigma)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-u^2)U(x\,\mathrm{cosec}\,\gamma - u\,\mathrm{ctg}\,\gamma,\ \sigma\,\mathrm{cosec}\,\gamma)}{(x'-u)^2+\sigma^2}, \tag{3}$$

где $U(x, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-u^2)}{(x-u)^2+\sigma^2}du$—функция Фойгта, $\sigma = (\Delta\nu_R + \Delta\nu_c)/\Delta\nu_D$ — параметр затухания, $\Delta\nu_R$ и $\Delta\nu_c$—ширины линии, обусловленные затуханием вследствие излучения и столкновений, $\Delta\nu_D$—доплеровская ширина линии.

Указанный закон соответствует случаю, когда помимо тепловых движений учитывается уширение верхнего уровня, обусловленное излучением и столкновениями. При этом предполагается, что в системе отсчета атома имеет место полное перераспределение по частотам

С помощью соотношения (1) нетрудно получить билинейное разложение и для функции $r_{\rm III}(x', x, \gamma)$. Действительно, принимая во внимание формулу

$$r_{\rm III}(x', x, \gamma) = \frac{\sigma}{\pi^2 U(0,\sigma)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(x-u)^2+\sigma^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{r_{\rm I}(u, t, \gamma)}{(x'-t)+\sigma^2}dt, \tag{4}$$

вытекающую из (3), и учитывая (1), находим:

$$r_{\mathrm{III}}(x', x, \gamma) = \frac{1}{U(0, \sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \gamma \, \alpha_k(x', \sigma) \alpha_k(x, \sigma), \tag{5}$$

где

$$\alpha_k(x, \sigma) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_k(u)\,du}{(x-u)^2 + \sigma^2} = (-1)^k \pi^{1/4} (2^{k/2} \sqrt{k!})^{-1} d^k U(x, \sigma)/dx^k. \tag{6}$$

Очевидно, что введенные выше функции $\alpha_k(x)$ являются предельными значениями функций $\alpha_k(x, \sigma)$ при $\sigma \to 0$. Вопросы, связанные с вычислением $\alpha_k(x, \sigma)$, разбираются в работах [8,9], поэтому их мы здесь не коснемся. Отметим лишь, что указанные функции удовлетворяют рекурентным соотношениям, которые существенно облегчают их табулирование.

После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению закона перераспределения $r_{\mathrm{II}}(x', x, \gamma)$, имеющего вид (см., например, [7,9])

$$r_{\mathrm{II}}(x', x, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, U(0, \sigma) \sin \gamma} \exp\left\{-\left(\frac{x-x'}{2}\right)^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\gamma}{2}\right\} \times$$

$$\times U\left(\frac{x+x'}{2} \sec \frac{\gamma}{2}, \sigma \operatorname{cosec} \frac{\gamma}{2}\right), \tag{7}$$

где теперь $\sigma = \Delta\nu_K / \Delta\nu_D$.

По указанному закону происходит перераспределение по частотам, когда рассеяние в системе покоя атома происходит без изменения частоты, и в то же время нельзя пренебречь конечной естественной шириной верхнего уровня. Функцией перераспределения (7) приходится пользоваться, когда роль эффектов давления невелика, например, при изучении диффузии излучения в газовых туманностях. Выражение для усредненной по направлениям функции перераспределения $r_{\mathrm{II}}(x', x)$ можно получить непосредственно из (7)

$$r_{\mathrm{II}}(x', x) = \frac{1}{\pi U(0, \sigma)} \int_{(\bar{x}-\underline{x})/2}^{\infty} \exp(-u^2) \left(\operatorname{arctg} \frac{\underline{x}+u}{\sigma} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{x}-u}{\sigma}\right) du, \tag{8}$$

где $\bar{x} = \max(x, x')$ и $\underline{x} = \min(x, x')$.

Следует отметить, что уже одно численное вычисление функции $r_{\mathrm{II}}(x', x)$ сталкивается с определенными трудностями, связанными прежде всего с разрывом производной этой функции при $x = x'$. Поэтому вопрос о построении функции $r_{\mathrm{II}}(x', x)$ и вычислении контуров спектральных линий при указанном законе затрагивался в целом ряде работ. Так, в работе [10] функция $r_{\mathrm{II}}(x', x)$ представляется в виде некоторого ряда, однако медленная сходимость последнего ограничивает его применимость при численных расчетах. В другой работе [11] для вычисления $r_{\mathrm{II}}(x', x)$ привлекались кубические сплайны.

Здесь мы укажем на другую возможность построения $r_{II}(x', x, \gamma)$ и $r_{II}(x', x)$, позволяющую к тому же применить для решения задач некогерентного рассеяния с данными законами перераспределения ранее разработанные методы. Дальнейшие наши рассуждения основываются на следующем представлении $r_{II}(x', x, \gamma)$:

$$r_{II}(x', x, \gamma) = \frac{\sigma}{\pi U(0, \sigma)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{r_I(x'+t, x+t, \gamma)}{t^2+\sigma^2} dt, \tag{9}$$

которое легко получить из (7) заменой переменной интегрирования в функции Фойгта на $\left(t + \frac{x+x'}{2}\right) \sec \frac{\gamma}{2}$. Пользуясь разложением (1), вместо (9) получаем

$$r_{II}(x', x, \gamma) = \frac{1}{U(0, \sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} \cos^k \gamma R_k(x', x), \tag{10}$$

где

$$R_k(x', x) = \frac{\sigma}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_k(x'+t)\alpha_k(x+t)}{t^2+\sigma^2} dt. \tag{11}$$

Аналогично для функции перераспределения $r_{II}(x', x)$, задающейся соотношением (8), будем иметь:

$$r_{II}(x', x) = \frac{1}{U(0, \sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} A_k R_{2k}(x', x). \tag{12}$$

Нетрудно показать, что величины $R_k(x', x)$ простым образом выражаются через знакомые нам функции $\alpha_k(x)$ и $\alpha_k(x, \sigma)$. Действительно, учитывая (6), можем написать

$$R_k(x', x) = 2^k k! \frac{\partial^{2k} R_0(x', x)}{\partial x^k \partial x'^k}. \tag{13}$$

Но для $R_0(x', x)$ имеем

$$R_0(x', x) = \alpha_0(\Delta)\alpha_0(s, \bar{\sigma}), \tag{14}$$

где $s = (x + x')/\sqrt{2}$, $\Delta = (x - x')\sqrt{2}$, $\bar{\sigma} = \sigma/\sqrt{2}$.

Подставляя (14) в (13) и пользуясь еще раз соотношением (6), окончательно получаем

$$R_k(x', x) = \sum_{l=0}^{k} c_{lk} \alpha_{2l}(\Delta) \alpha_{2k-2l}(s, \bar{\sigma}), \tag{15}$$

где $c_{lk} = (-1)^l \sqrt{(2l)!(2k-2l)!} / 2^k l!(k-l)!$.

Очевидно, что при $\sigma \to 0$ формула (10) переходит в формулу (1). При $\sigma \neq 0$, как это вытекает из свойств функций $\alpha_k(x, \sigma)$, существует интервал частот вокруг центральной частоты, где $r_{II} \approx r_I$. В указанном интервале, который тем шире, чем меньше σ, скорость сходимости рядов (10) и (12), с одной стороны, и рядов (1) и (2), с другой, по сути дела, одна и та же. Мы видим, что функции $\alpha_k(x, \sigma)$ и их предельные значения $\alpha_k(x)$ играют фундаментальную роль в теории некогерентного рассеяния. С помощью указанных функций несложно построить все перечисленные выше законы перераспределения. Однако, как мы убедимся ниже, (см. также ([4])), роль функций $\alpha_k(x, \sigma)$ этим не исчерпывается.

Остановимся теперь на вопросе об определении интенсивности излучения, диффузно отраженного от полубесконечной атмосферы, освещаемой извне излучением в непрерывном спектре. Для краткости ограничимся рассмотрением случая рассеяния в одномерной среде, причем в качестве закона перераспределения по частотам возьмем $r_{II}(x', x)$. Применение принципа инвариантности с учетом (11) и (12) позволяет свести задачу об определении коэффициента отражения $\rho(x', x)$ к решению следующей бесконечной системы функциональных уравнений для функций $\varphi_k(x, t)$:

$$\varphi_k(x, t) = \alpha_{2k}(x+t) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x', x)\alpha_{2k}(x'+t)dx', \quad (k=0, 1, \ldots), \tag{16}$$

где

$$\rho(x', x) = \frac{\lambda}{2} \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m \bar{R}_{2m}(x', x)}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)}, \quad \bar{R}_m(x', x) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x, t)\varphi_m(x', t)}{t^2 + \sigma^2}.$$

Система уравнений (16) несущественным образом отличается от аналогичной системы, получающейся при рассмотрении рассеяния с доплеровским законом перераспределения ([3]). Поэтому основные результаты названной работы, касающиеся приближенного решения системы уравнений для φ-функций, остаются в силе и в рассматриваемом случае. Так, например, если ограничиться решением укороченной системы уравнений

$$\varphi_k(x, t) = \alpha_{2k}(x+t) + \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{N} A_m \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x, t')}{t'^2 + \sigma^2} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m(x', t')\alpha_{2k}(x'+t')}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)} dx' \tag{17}$$

то учитывая, что при любых фиксированных x и t функции $\varphi_k(x, t)$ с увеличением индекса стремятся к соответствующим $\alpha_{2k}(x+t)$, для определения коэффициента отражения $\rho(x', x)$ можно предложить формулу

$$\rho(x', x) = \frac{\lambda}{2} \frac{\sum\limits_{m=0}^{N} A_m [\bar{R}_{2m}(x', x) - R_{2m}(x', x)] + r_{II}(x', x)}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)}, \tag{18}$$

где N характеризует порядок приближения и определяется шириной интересующего нас интервала частот. Заметим также, что замену $\varphi_k(x, t)$ соответствующими функциями $\alpha_{2k}(x+t)$ можно произвести в самой системе уравнений (15), сведя ее, тем самым, к решению следующей системы:

$$\varphi_k^*(x, t) = \alpha_{2k}(x+t) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \sum_{m=0}^{N} A_m \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{t'^2 + \sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_m^*(x', t')\varphi_m^*(x, t') - \alpha_{2m}(x'+t')\alpha_{2m}(x+t')}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)} \times$$

$$\times \alpha_{2k}(x'+t)dt + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_{II}(x', x)}{U(x, \sigma) + U(x', \sigma)} \alpha_{2k}(x'+t)dx'. \tag{19}$$

После определения функции отражения $\rho(x', x)$ контур спектральной линии находится интегрированием последней по одному из аргументов. Таким образом, разделение переменных под знаком интеграла в (11) достаточно для применения развитых ранее методов решения и на случай рассеяния с законом перераспределения $r_{II}(x', x)$. Мы видим, что важность функций $\alpha_k(x)$ при законе перераспределения $r_I(x', x, \gamma)$, так же, как и функций $\alpha_k(x, \sigma)$ — при $r_{II}(x', x, \gamma)$ и $r_{III}(x', x, \gamma)$, заключается еще и в том, что при больших значениях индекса последними можно заменить соответствующие φ-функции. Заметим также, что проведенные выше рассуждения, по аналогии с ([4]), легко провести и в трехмерном случае при рассеянии с анизотропной функцией перераспределения по частотам.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԻԿՈՂՈՍՅԱՆ

Լույսի դիֆուզ անդրադարձումը կիսաանվերջ մթնոլորտից վերաբաշխման օրենքի դեպքում

Առաջարկվում է $r_{II}(x', x, \gamma)$ վերաբաշխման օրենքի կառուցման մի նոր համեմատաբար պարզ եղանակ։ Նշված վերաբաշխման ֆունկցիան ներկայացվում է շարքի տեսքով, ուր մասնակցում են ոչ կոհերենտ ցրման տեսության մեջ հայտնի $\alpha_k(x)$ և $\alpha_k(x, \sigma)$ ֆունկցիաները։ Մյուս կողմից $r_{II}(x', x, \gamma)$-ի համար ստացված է մի նոր ներկայացում, որը թույլ է տալիս լուծել կիսաանվերջ մթնոլորտից լույսի դիֆուզ անդրադարձման խնդիրը՝ օգտագործելով ինվարիանտության սկզբունքի վրա հիմնված նախկինում մշակված լուծման մեթոդները։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *N. B. Yengibarian, A. G. Nikoghossian*, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 13, 787, 1973. [2] *Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян*, ДАН СССР, т. 229, 583 (1976). [3] *H. A. Haruthyunian, A. G. Nikoghossian*, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 19, 135 (1978). [4] *А. Г. Никогосян*, ДАН СССР, т. 235, 786 (1977). [5] *Г. А. Арутюнян, А. Г. Никогосян*, ДАН СССР, т. 242, 66 (1978). [6] *C. Magnan*, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 15, 979 (1975). [7] *D. G. Hummer*, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 125, 21 (1962). [8] *A. Reichel*, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 8, 1601 (1968). [9] *D. Mihalas*, Stellar Atmospheres, Freeman and Comp. San Francisco, 1970. [10] *D. Rees, A. Reichel*, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 8, 1795 (1968). [11] *T. F. Adams, D. G. Hummer, G. B. Rybicki*, J. Quantit. Spectroscop. Radiat. Transfer, 11, 1365 (1971).