ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 3

УДК 519.212.3

МАТЕМАТИКА

В. К. Оганян

Комбинаторные принципы в стохастической геометрии случайных полей отрезков

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 20/XII 1978)

В последнее время в стохастической геометрии изучению случайных полей отрезков (сл. п. о.) уделялось значительное внимание ([1-3]). В настоящей статье приводятся результаты исследования сл. п. о. на плоскости на основе выдвинутых Р. В. Амбарцумяном комбинаторных принципов интегральной геометрии ([1,4]).

Сл. п. о. на плоскости определяются как случайные точечные поля в некотором пространстве Δ (фазовом пространстве). Направленный отрезок δ на плоскости определяется четверкой чисел (x, y, φ, τ), где (x, y)—декартовы координаты центра отрезка, φ—угол, который составляет отрезок с некоторым фиксированным направлением, τ—длина отрезка. Соответственно этому в качестве фазового пространства выбирается $\Delta = R^2 \times [0, 2\pi) \times R_+$ (R^2 — евклидова плоскость, $R_+ = [0, +\infty)$) с топологией произведения. Случайное точечное поле в Δ определяется обычным образом. Случайное поле отрезков $m(\omega)$ называется однородным и изотропным, если его распределение P инвариантно относительно группы евклидовых движений M.

Стандартное пуассоновское поле определяется заданием пуассоновского точечного поля в Δ, которое управляется мерой с элементом $dK \cdot dF$, где dK—элемент кинематической меры на $R^2 \times [0, 2\pi)$ ([5]), а dF—элемент распределения на R_+ с конечным средним.

В работе изучается одномерный маркированный точечный процесс пересечений $\{Q_i, \sigma_i\}$ однородного и изотропного сл. п. о. $m(\omega)$ с фиксированной прямой g. Точечный процесс определяется как $\{Q_i\} = m \cap g$ (таким образом, $\{Q_i\}$ есть случайное множество точек пересечений отрезков случайного поля с прямой g). Маркой в точке Q_i служит тройка $\sigma_i = (\psi_i, \tau_i, t_i)$, где ψ_i—угол, под которым происходит пересечение отрезка случайного поля с прямой g в точке Q_i, τ_i— длина этого отрезка, t_i—длина части отрезка, лежащей в одной из полуплоскостей, отделяемых прямой g.

Значительный интерес представляет выявление ограничений на внутреннюю вероятностную структуру одномерных (маркированных) точечных процессов пересечений сл. п. о. с прямыми, которые вытекают из инвариантности распределений сл. п. о. относительно группы M. В настоящей статье указываются некоторые свойства, которыми необходимо обладает маркированный точечный процесс, порожденный M-инвариантным сл. п. о.

Рассматривается случайная величина $\eta(l)$, равная числу точек пересечений сл. п. о. $m(\omega)$ с фиксированным отрезком длины l. Ее распределение $p_k(l)=P\{\eta(l)=k\}$ $(k=0, 1, \ldots)$ не зависит от расположения отрезка на плоскости.

Помимо свойства инвариантности относительно группы движений, на вероятность P накладывается условие локальной абсолютной непрерывности относительно стандартного пуассоновского поля. Представляется, что последнее условие не может быть отброшено.

Для формулировки основного результата нам потребуются некоторые понятия и обозначения. Пусть Δ_l множество всех направленных отрезков δ, таких, что $\delta\cap K_l\neq\varnothing$ (K_l—круг диаметра l). Положим $\Delta_l^n=\underbrace{\Delta_l\times\cdot\cdot\cdot\times\Delta_l}_{n\text{ раз}}$; через $N(m)$ обозначим число отрезков поля m, задевающих круг K_l. Ниже всегда предполагается, что $EN^4<\infty$ (E—знак математического ожидания относительно P).

Вследствие сделанных предположений существуют следующие распределения:

$$dF^{[m]}(\delta_1, \ldots, \delta_m)=\frac{d\delta_1 \ldots d\delta_m}{E[N(N-1)\ldots(N-m+1)]}\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)\cdot$$

$$\cdot P(N(m)=n)\cdot\int_{\Delta_l^{n-m}} f_n(\delta_1, \ldots, \delta_m, \delta_{m+1}, \ldots, \delta_n)d\delta_{m+1}\ldots d\delta_n,$$

где $d\delta=dx\,dy\,d\varphi\,d\tau$, а $f_n(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ совместная плотность n отрезков, задевающих K_l.

Случайную точку в Δ_l^m, имеющую распределение $F^{[m]}$, естественно будет называть „произвольной m-кой отрезков, задевающих круг K_l“.

Распределение $dF^{[m]}$ абсолютно непрерывно относительно $d\delta_1\ldots$ $\ldots d\delta_m$:

$$dF^{[m]}(\delta_1, \ldots, \delta_m)=f^{[m]}(\delta_1, \ldots, \delta_m)d\delta_1\ldots d\delta_m.$$

Обозначим через $\Delta_l^m(\delta_1, \ldots \delta_s)$ многообразие (размерности $4(m-s)$), лежащее в Δ_l^m и определяемое при $m\geqslant s$ следующим образом:

$$\Delta_l^m(\delta_1^0, \ldots, \delta_s^0)=\{(\delta_1, \ldots, \delta_s, \delta_{s+1}, \ldots, \delta_m):\ \delta_1=\delta_1^0\ldots\delta_s=\delta_s^0\}.$$

Каждая из плотностей $f_m(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ порождает вероятность $\Pi^{(m)}_{\delta_1\ldots\delta_s}(\cdot)$ на $\Delta_l^m(\delta_1, \ldots, \delta_s)$; последняя задается плотностью $c(\delta_1, \ldots, \delta_s)\cdot f_m(\delta_1, \ldots, \delta_s,$

$\delta_{s+1}, \ldots, \delta_m)$ ($\delta_1, \ldots, \delta_s$ — фиксированы), где $c(\delta_1, \ldots, \delta_s)$ определяется обычным условием нормировки:

$$c^{-1}(\delta_1, \ldots, \delta_s) = f^{[s]}(\delta_1, \ldots, \delta_s) \cdot E\,[N(N-1) \cdot \cdot \cdot (N-s+1)].$$

Обозначим через $\Pi_{\delta_1 \ldots \delta_s}(\cdot)$ следующее распределение:

$$\Pi_{\delta_1 \ldots \delta_s}(\cdot) = \sum_{n=s}^{\infty} n(n-1) \ldots (n-s+1) \cdot P(N(m)=n) \cdot \Pi^{(n)}_{\delta_1 \ldots \delta_s}(\cdot).$$

Вероятность $\Pi_{\delta_1 \ldots \delta_s}(\cdot)$ имеет смысл условного распределения сл. п. о., задевающих круг K_l, при условии, что „произвольная s-ка отрезков" реализуется как $\delta_1 \ldots \delta_s$.

Теорема. *Если P распределение однородного и изотропного, локально абсолютно непрерывного сл. п. о., для которого $EN^4 < \infty$, то имеет место следующее представление для $p_0(l) = P\{\eta(l) = 0\}$:*

$$\frac{1}{3l}\frac{dp_0(l)}{dl} = \frac{2\lambda}{3l}\int\limits_{\Delta^1} \frac{d}{dl}\left|\,|\delta \cap l| \cdot \Pi_\delta \binom{l}{0}\right| dF(\tau)dt - \frac{2\lambda}{l}\int\limits_{\Delta^1} \Pi_\delta \binom{l}{0} dF(\tau)dt -$$

$$-\frac{2\lambda}{3}\int\limits_{\Delta^1} \frac{d}{dl}\left|\Pi_\delta \binom{l}{0}\right| dF(\tau)td + \sum_{i=1}^{12} c_i \int\limits_{\varkappa_i} \pi_i \binom{l}{0} d\Phi_i,$$

где λ — интенсивность точечного поля в $\Delta(\lambda < +\infty)$; $\binom{l}{0} = \{\eta(l) = 0\}$; $|\delta \cap l|$ = длина $\delta \cap l$; c_i — постоянные; $\Delta^1 = \{\delta \in \Delta_l$: δ лежит на прямой, проходящей через отрезок $l\}$; многообразия $\varkappa_i$ имеют вид $\bigcup \Delta^n_l(\delta_1, \ldots, \delta_k)$. Здесь в каждом из случаев объединение берется по всевозможным реализациям отрезков $\delta_1 \ldots \delta_k$, когда один или два конца каждого из отрезков $\delta_1 \ldots \delta_k$ лежат на отрезке $l (k = 2, 3, 4)$; $d\Phi_i$ — некоторые меры на $\varkappa_i$; $\pi_i \binom{l}{0}$ — условная вероятность события $\binom{l}{0}$, при условии, что произвольные k отрезков реализуются как $\delta_1 \ldots \delta_k$ $(k = 2, 3, 4)$.

Таким образом, основной результат устанавливает связь между распределением случайной величины $\eta(l)$ и некоторыми условными распределениями той же случайной величины.

Характер основного результата позволяет выделить класс сл. п. о., в котором результат приобретает особенно простой вид, напоминающий известные „формулы Пальма" для точечных процесов.

Для разъяснения характера этих условий полезна следующая интерпретация: отрезок на плоскости может рассматриваться как график движения частицы, передвигающейся по оси g с постоянной скоростью, началу и концу отрезка соответствуют "возникновение" и „исчезновение" частицы на оси g.

Одним из условий, выделяющих упомянутый класс, является условие независимости движений *налево* и *направо* для частиц, траектории которых задевают вертикальные окна, размещенные на оси. Сокращенно соответствующее условие мы назовем условием л. п. в. о. — независимости. В терминах маркированного процесса $\{Q_i, \alpha_i\}$ условие л. п. в. о.—независимости может быть записано как условие некоррелированности котангенсов пар углов ψ_i.

Другим условием типа независимости является условие совпадения некоторых двух условных распределений P_1 и P_2, которые определяются следующим образом. Пусть A_n—последовательность областей, лежащих в правой полуплоскости относительно прямой g и стягивающихся к точке $Q_1 \in g$. $D_{n,1}(D_{n,2})$—последовательность областей, лежащих в правой (левой) полуплоскости относительно g и стягивающихся к точке $Q_2 \in g$. Событие $B_{n,1}$ $(B_{n,2})$ состоит в том, что в области A_n и $D_{n,1}$ $(A_n$ и $D_{n,2})$ попадает по одному концу отрезков случайного поля $m(\omega)$ и соответствующие два отрезка пересекают прямую g. Таким образом, $B_{n,1}$, $B_{n,2}$ принадлежат σ—алгебре $\mathbf{A}_g$, на которой определена P_φ. В случае, когда поле концов отрезков есть точечное поле конечной интенсивности, можно показать, что для достаточно широкого класса событий $A \in \mathbf{A}_g$ существует предел

$$P_i(A) = \lim_{\substack{D_{n,i} \downarrow \{Q_2\} \\ A_n \downarrow \{Q_1\}}} \frac{P(A \cap B_{n,i})}{P(B_{n,i})} \; (i = 1, 2),$$

который можно продолжить до вероятности на $\mathbf{A}_g$.

Отметим, что условие

$$P_1(A) = P_2(A), \quad A \in \mathbf{A}_g \qquad (*)$$

(условие (*)-независимости) заведомо выполняется, если последовательность сдвигов $\{t_i\}$ есть последовательность независимых случайных величин.

Упрощение, о котором говорилось выше, имеет место для сл. п. о., которые удовлетворяют одновременно условиям л. п. в. о. и (*)-независимости.

С л е д с т в и е. Пусть P удовлетноряет всем условиям теоремы. В классе л. п. в. о. и (*)-независимых распределений

$$\Pi_\delta\binom{l}{k} = p_k(l), \; (k = 0, 1, \ldots), \; (\delta \in \Delta^1)$$

есть необходимое и достаточное условие пуассоновости $p_k(l)$.

В заключение выражаю благодарность своему научному руководителю Р. В. Амбарцумяну.

Ереванский государственный
университет

Վ. Կ. ՕՀԱՆՅԱՆ

Հատվածների պատահական դաշտերի ստոխաստիկ երկրաչափության կոմբինատոր սկզբունքներ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է միաչափ պիտակավորված կետային $\{P_i, a_i\}$ պրոցեսները, որոնք առաջանում են համասեռ և իզոտրոպ պատահական հատվածների դաշտի և ֆիքսած g ուղղի հատումից։ Պիտակավորված կետային պրոցեսի P_* բաշխումը, որը առաջանում է համասեռ և իզոտրոպ պատահական հատվածների դաշտից, չի կարող լինել կամայական։ Հետաքրքրություն է ներկայացնում համապատասխան սահմանափակումների նկարագրումը։ Ներկա հոդվածում բերվում են որոշ անհրաժեշտ պայմաններ, որոնք վերադրվում են P_* բաշխմանը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. V. Ambartzumian*, Adv. Appl. Prob., 9, 1977. [2] *Р. В. Амбарцумян*. Теория вероятностей и ее приложения, 18, вып. 3, 1973. [3] *R. Coleman*, The distance from a given point to the nearest end of one member of a random process of linear segments. In Stochastic Geometry, John Wiley & Sons, 1974. [4] *R. V. Ambartzumian*, The solution to the Buffon — Sylvester problem in R^3. Z. Wahrscheinlichkeitsth, 27, 1973. [5] *Л. А. Сантало*, Введение в интегральную геометрию. ИЛ, М., 1956.