

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

С. А. Григорян

Об алгебрах, порожденных аналитическими по Аренсу—Зингеру функциями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 6/II 1979)

Пусть Γ —подгруппа аддитивной группы вещественных чисел, снабженная дискретной топологией, $\Gamma_+ = \{x \in \Gamma; x \geq 0\}$ —подполугруппа группы Γ , а G —группа характеров к группе Γ . По теореме двойственности Понтрягина G является компактной абелевой группой, и группа характеров к G есть группа Γ .

Рассмотрим на локально компактном пространстве C_0 —полученном из декартова произведения $G \times [0, \infty)$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$ —систему $\{w^x\}_{x \in \Gamma_+}$ непрерывных функций, заданных следующим образом: $w^x(a \times r) = a(x) \cdot r^x$, $a \times r \in C_0$, $x \in \Gamma_+$. Очевидно, $w^x \cdot w^{x_1} = w^{x+x_1}$, $w^x \cdot w^{x_1} \in \{w^x\}_{x \in \Gamma_+}$.

Определение. Комплекснозначную функцию, определенную на открытом множестве $D \subset C_0$, будем называть аналитической по Аренсу—Зингеру или просто аналитической, если для каждой точки множества существует такая окрестность $U \subset D$, что функция f аппроксимируется на U линейными комбинациями над C функций из $\{w^x\}_{x \in \Gamma_+}$.

Линейные комбинации над C функций из $\{w^x\}_{x \in \Gamma_+}$ будем называть полиномами, а отношение двух полиномов—рациональной функцией.

В зависимости от выбора Γ получаем различные пространства; в частности, когда Γ изоморфна группе целых чисел, пространство C_0 изоморфно комплексной плоскости и аналитичность по Аренсу—Зингеру в этом случае совпадает с обычной аналитичностью.

В дальнейшем для компакта $K \subset C_0$ через $P(K)$ будем обозначать равномерную алгебру на K , порожденную полиномами, а через $R(K)$ —равномерную алгебру на K , порожденную такими рациональ-

* Пространство C_0 и соответствующие определения были независимо от автора введены Т. В. Тоневым.

ными функциями $f=p/q$, что множество нулей полинома q лежит вне компакта K .

В данной заметке формулируются результаты, характеризующие свойства алгебр $P(K)$ и $R(K)$ в случае, когда группа Γ есть группа рациональных чисел.

1°. Пусть $u \in C_0$, $u = \alpha \times r$. Для любого $\beta \in G$ определим произведение $\beta \cdot u = v \in C_0$, где $v = (\beta \cdot \alpha) \times r$.

Лемма 1. Пространство C_0 можно представить в виде

$$C_0 = (\bigcup_i C_i) \cup \{0\},$$

где $0 = G \times \{0\}$, а множества C_i , $i \in I$ попарно не пересекаются, связны, всюду плотны в C_0 и удовлетворяют следующим условиям:

а) для любых $i, j \in I$ существует $\alpha \in G$ такое, что $C_i = \alpha C_j$;

б) для любого $i \in I$ существует такой гомеоморфизм Ψ_i пространства C_i на комплексную плоскость C , что для каждого $w^x_0 \in \{w^x\}_{x \in \Gamma}$ выполняется равенство: для $z \in C$ $w^x_0 \Psi_i^{-1}(z) = \exp(-x_0 z)$.

Пусть $W(0 \in W)$ — полиномиально выпуклый компакт в C . Для некоторого фиксированного $x_0 \in \Gamma$ рассмотрим компакты: $K_0 = \{u \in C_0; w^x_0(u) \in W\}$ и $G_0 = \{\alpha \in G, \alpha(x_0) = 1\}$.

Лемма 2. Алгебра $P(K_0)$ изометрически изоморфна равномерной алгебре на декартовом произведении $W \times G_0$, порожденной функциями вида $f \cdot g$, где $f \in P(W)$, а $g \in C(G_0)$ — алгебре всех непрерывных комплекснозначных функций на G_0 .

Для компакта $K \subset C_0$ пусть

$$\hat{K} = \{u \in C_0; |p(u)| \leq \sup_K |p| \text{ для любого полинома } p\}$$

$K^0 = \{u \in C_0; |f(u)| \leq \sup_K |f| \text{ для любой рациональной функции из } R(K)\}$.

Множество $\hat{K}$ будем называть полиномиально выпуклой оболочкой множества K , а K^0 будем называть рационально выпуклой оболочкой. Отметим, что каждый компакт K в C_0 является рационально выпуклым, хотя и не всегда полиномиально выпуклым.

Следующая лемма устанавливает критерий полиномиальной выпуклости компакта K .

Лемма 3. Для того, чтобы компакт $K \subset C_0$ был полиномиально выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i \in I$ множество $K_i = K \cap C_i$ (см. лемму 1) имело бы связное в C_i дополнение.

Из определения полиномиальной выпуклости следует, что пространство максимальных идеалов алгебры $P(K)$ есть в точности $\hat{K}$.

Воспользовавшись леммами 1–3, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть K — компакт в C_0 . Граница Шилова алгебры $R(K)$ совпадает с множеством $\bigcup \hat{K}_i$, где ∂K_i — топологическая в C_1 граница множества $K_i = K \cap C_1$.

Теорема 2. Для алгебры $R(K)$ справедливы следующие условия:

- а) пространство максимальных идеалов алгебры $R(K)$ есть K ;
- б) граница Шилова алгебры $R(K)$ совпадает с $\bigcup \partial K_i$, где ∂K_i — топологическая граница множества $K_i = K \cap C_1$.

Отметим, что из теорем 1 и 2 и леммы 2 следует, что граница Шилова как для алгебры $R(K)$, так и для алгебры $P(K)$ не обязана совпасть с топологической границей множества K .

Пусть $H(K)$ — алгебра всех функций, аналитических в окрестности K .

Теорема 3. Любую функцию $f \in H(K)$ равномерно на K можно приблизить функциями из $R(K)$.

2. Пусть A — равномерная алгебра на некотором компакте X . Говорят, что A является локально-аппроксимативной алгеброй, если любая непрерывная на X функция, локально аппроксимируемая функциями из A , принадлежит алгебре $A^{(1)}$.

Лемма 4. Для любого компакта $K \subseteq C_0$ алгебра $R(K)$ является локально-аппроксимативной. Алгебра $P(K)$ локально-аппроксимативна тогда и только тогда, когда компакт K полиномиально выпукл.

Теорема 4. Пусть K — компакт в C_0 . Для того, чтобы $P(K)$ совпало бы с $C(K)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i \in I$, $\text{Int} K_i = \emptyset$ в C_1 и дополнение к $K_i = K \cap C_1$ было бы связно в C_1 .

Теорема 5. Пусть K — такой компакт в C_0 , что каждая точка из K является точкой пика для алгебры $R(K)$. Тогда $R(K) = C(K)$.

Доказательство теорем 4 и 5 проводится с помощью лемм 2 и 3 и аналогичных результатов для равномерных алгебр $P(K)$ и $R(K)$ в случае, когда K — плоский компакт.

Вычислительный центр
Госплана Армянской ССР

Ս. Ա. ՉՐԻԳՈՐՅԱՆ

Արսեն — Ձեռագրի իմաստով անալիտիկ ֆունկցիաներով ծնված
հանրահաշիվների մասին

Դիցուք Γ -ն իրական թվերի խմբի որոշ ենթախմբեր է, G -ն Γ ,
խմբի համալուծ խումբն է, իսկ $C_0 = (G \times [0, +\infty)) / (G \times \{0\})$: Կամարական
 $x \in \Gamma_+ = \{x \in \Gamma; x \geq 0\}$ էլիմենտին համապատասխանում է $w(a \times r) = a(x)r^x$

անընդհատ ֆունկցիոնալ C_0 լոկալ կոմպակտ տարածության վրա: Մ ֆունկցիաների զծախն կոմպինացիաները կոչվում են բազմանդամներ, իսկ բազմանդամների հարաբերությունները՝ ուսցիոնալ ֆունկցիաներ: Եթե K -ն C_0 տարածության կոմպակտ հեթարագմությունն է, ապա $P(K)$ -ով (համապատասխանաբար՝ $R(K)$ -ով) նշանակվում է բազմանդամներիով (համապատասխանաբար՝ K կոմպակտի վրա տնընդհատ ուսցիոնալ ֆունկցիաներով) ժնված հավասարաչափ հանրահաշիվը: Ստացված են արդյունքներ, որոնք նկարագրում են $P(K)$ և $R(K)$ հանրահաշիվների մաքսիմալ իդեալների տարածությունները և Շիլովի L զրերը:

Դտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $P(K) = C(K)$ հավասարության համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Կ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ ՈՒ Ն

1. Т. Г. Мзлуц. Равномерные алгебры. М., Мир, 1973.