ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 3

УДК 517.4

МАТЕМАТИКА

Л. В. Микаелян

Асимптотическое поведение детерминантов Фредгольма усеченных интегральных операторов с матричными ядрами, зависящими от разности аргументов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/XII 1978)

Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(t)+\lambda\int_0^r K(t-s)f(s)ds=g(t)\ (0\leqslant t\leqslant r,\ 0<r<\infty), \tag{1}$$

где $K(t)=\|k_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n(-\infty<t<\infty)$ -заданная матрица-функция, $g(t)=\{g_j(t)\}_{j=1}^n$ — заданная, а $f(t)=\{f_j(t)\}_{j=1}^n$ — искомая вектор-функции. Применяя способ, предложенный Фредгольмом, легко видеть, что эта система эквивалентна следующему скалярному уравнению

$$F(t)+\lambda\int_0^{nr} K_r(t,s)F(s)ds=G(t)\ (0\leqslant t\leqslant nr); \tag{2}$$

здесь $F(t)=f_j(t-(j-1)r)$, $G(t)=g_j(t-(j-1)r)$ при $(j-1)r\leqslant t<jr$, а $K_r(t,s)=k_{ij}(t-(i-1)r-s+(j-1)r)$ при $(i-1)r\leqslant t<ir$, $(j-1)r\leqslant s<jr$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

Для этого уравнения, при определенных условиях, обычным образом определяется детерминант Фредгольма

$$D(K_r,\lambda)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\int_0^{nr}\cdots\int_0^{nr}K_r\begin{pmatrix}s_1&\cdots&s_k\\s_1&\cdots&s_k\end{pmatrix}ds_1\cdots ds_k, \tag{3}$$

где

$$K_r\begin{pmatrix}s_1&\cdots&s_k\\s_1&\cdots&s_k\end{pmatrix}=\det\|K_r(s_i,s_j)\|_{i,j=1}^k$$

—символ Фредгольма.

Так как спектры системы (1) и уравнения (2) совпадают, то естественно назвать детерминантом Фредгольма системы (1) $D(K_r,\lambda)$, который здесь обозначается через $D_r(K,\lambda)$.

В этой заметке изучается асимптотическое поведение $D_r(K, \lambda)$ при $r \to \infty$. Тем самым рассматривается континуальный аналог задачи о поведении детерминанта блочно-теплицевой матрицы $\|C_{i-j}\|_{i,j=1}^{k}$ при $k \to \infty$, где C_j $(j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$—некоторые матрицы фиксированного порядка n.

Последней задачей, в скалярном случае, когда c_j являются коэффициентами Фурье положительной функции $p(t)$, впервые занимался Г. Сеге ([1]). Позже уточнению и обобщению результатов Г. Сеге было посвящено много работ: М. Г. Крейн ([2]), Хиршман ([3]), Девинатц ([4]), Я. Л. Геронимус ([5]), Б. Л. Голинский и И. А. Ибрагимов ([6]) и др.

В случае, когда c_j—коэффициенты Фурье матрицы-функции $c(t)$, вопрос о нахождении асимптотики для $\det\|c_{i-j}\|_{i,j=1}^{k}$ при $k \to \infty$ был рассмотрен Боуерсом ([7]), Уидомом ([8]) и др.

В скалярном случае использованием теоретико-вероятностных методов континуальные аналоги теорем Г. Сеге впервые были обнаружены М. Кацем ([9]). Другие результаты в этом направлении были получены Н. И. Ахиезером ([10]), Хиршманом ([3]), В. Н. Солевым ([11]).

Некоторые результаты по континуальным аналогам теорем Г. Сеге для матричного случая приведены в работах И. Ю. Линника ([12]) и автора ([13]).

1° Введем необходимые обозначения и изложим некоторые известные и вспомогательные предложения.

Пусть $L_1^{(n\times n)}$ — банахово пространство матриц-функций $\Phi(t)=\|\varphi_{ij}(t)\|_{i,j=1}^{n}$ с элементами из $L_1(-\infty,\infty)$ и с нормой

$$|\Phi| = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j=1}^{n} |\varphi_{ij}(t)|\,dt.$$

Нетрудно проверить, что множество всех матриц-функций, допускающих представление

$$\Phi(\lambda) = C_\Phi + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(t) e^{i\lambda t}\,dt, \tag{4}$$

где $C_\Phi = \|C_\Phi^{ij}\|_{i,j=1}^{n}$—некоторая постоянная матрица, $\Phi(t) \in L_1^{(n\times n)}$, является банаховой алгеброй относительно поточечного умножения с нормой

$$\|\Phi(\lambda)\| = |C_\Phi| + |\hat{\Phi}|;$$

здесь $|C_\Phi| = \sum_{i,j=1}^{n} |C_\Phi^{ij}|$. Обозначим эту алгебру через $R^{(n\times n)}$. Определим

подалгебру $R_+^{(n\times n)}(R_-^{(n\times n)})$ алгебры $R^{(n\times n)}$ следующим образом: $\Phi(\lambda)\in R_+^{(n\times n)}$ ($\Phi(\lambda)\in R_-^{(n\times n)}$), если в представлении (4) $\hat{\Phi}(t)=0$ при $t<0$ ($t>0$).

Через $L_2^{(n)}$ обозначим гильбертово пространство n-мерных вектор-функций, определенных на полуоси $(0, \infty)$ со скалярным произведением

$$(f, g)=\int_0^\infty g^*(t)f(t)dt.$$

Если

$$K(\lambda)=I_n+\int_{-\infty}^{\infty}\hat{K}(t)e^{i\lambda t}dt\in R^{(n\times n)},$$

то в пространстве $L_2^{(n)}$ определим следующие операторы, ассоциированные с $K(\lambda)$:

$$T(K)f=f(t)+\int_0^\infty \hat{K}(t-s)f(s)ds\ (0\leqslant t<\infty), \tag{5}$$

$$H(K)f=\int_0^\infty \hat{K}(t+s)f(s)ds\ (0\leqslant t<\infty), \tag{6}$$

а также операторы

$$(P_rf)(t)=\begin{cases} f(t), & \text{если } t\in[0,\ r] \\ 0, & \text{если } t\in(r,\ \infty). \end{cases}$$

$$(Q_rf)(t)=\begin{cases} f(r-t), & \text{если } t\in[0,\ r] \\ 0, & \text{если } t\in(r,\ \infty). \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$T(K_1K_2)-T(K_1)T(K_2)=H(K_1)H(\tilde{K}_2), \tag{7}$$

$$T_r(K_1K_2)-T_r(K_1)T_r(K_2)=P_rH(K_1)H(\tilde{K}_2)P_r+Q_rH(\tilde{K}_1)H(K_2)Q_r; \tag{8}$$

здесь $T_r(K)=P_rT(K)P_r$, а $\tilde{K}(\lambda)=I_n+\int_{-\infty}^{0}\hat{K}(-t)e^{i\lambda t}dt$.

Рассмотрим множество $K^{(n\times n)}$, состоящее из тех матриц-функций $\Phi(\lambda)\in R^{(n\times n)}$, для которых конечна величина

$$\|\Phi\|_1 = |C_0|_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(t)|_1 dt + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t| \, |\Phi(t)|_1^2 dt \right)^{1/2*}$$

Если эту величину принять за норму, то из работы М. Г. Крейна ([3]) следует, что $\mathbf{K}^{(n\times n)}$ является банаховой алгеброй.

Известно, что если $K(\lambda) \in \mathbf{K}^{(n\times n)}$, то операторы $H(K)$ и $H(\bar{K})$ являются операторами Гильберта—Шмидта ([14]).

Отметим две леммы, полезные в дальнейшем.

Пусть задано векторное интегральное уравнение

$$f(t) + \lambda \int_0^r K(t, s) f(s) ds = g(t). \qquad (9)$$

Для этого уравнения определим детерминант Фредгольма $D_r(K, \lambda)$ как (3), принимая в нем

$$K_r(t, s) = k_{ij}(t-(i-1)r, \; s-(j-1)r) \quad ((i-1)r \leqslant t < ir, \; (j-1)r \leqslant s < jr),$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n), \text{ где } K(t, s) = \|k_{ij}(t, s)\|_{i,j=1}^{n}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если в уравнении* (9) *матрица-функция* $K(t, s) = 0$ *при* $t > s$ *или* $t < s$, *тогда*

$$D_r(K, \lambda) = \exp\left[\lambda \int_0^r \operatorname{sp} K(s, s) ds\right].$$

Кроме этой леммы нам понадобится еще

Лемма 2. *Если матрица-функция*

$$K(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt \in R^{(n\times n)}$$

допускает факторизацию

$$I_n + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t} dt = \left(I_n + \int_0^{\infty} \hat{K}_+(t) e^{i\lambda t} dt\right) \left(I^n + \int_{-\infty}^{0} \hat{K}_-(t) e^{i\lambda t} dt\right),$$

где матрицы-функции $\hat{K}_+(t)$ *и* $\hat{K}_-(t)$ *непрерывны в нуле, тогда*

$$\operatorname{sp}[\hat{K}_+(0) + \hat{K}_-(0)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right) \operatorname{Indet} K(\lambda) d\lambda.$$

---

* Если $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$, то $|A|_1 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$.

2° Пусть

$$K(\lambda)=I_n+\int_{-\infty}^{\infty}\hat{K}(t)e^{i\lambda t}\,dt\in R^{(n\times n)}$$

обратим в этой алгебре. Обратное к нему обозначим через

$$K^{-1}(\lambda)=I_n+\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}^0(t)e^{i\lambda t}\,dt\in R^{(n\times n)}.$$

Операторы $T(K^{-1})$ и $H(K^{-1})$ определяются равенствами (5) и (6) заменой в них матрицы-функции $\hat{K}(t)$ на $\hat{K}^0(t)$.

Обозначим через $D_r(K)=D_r(\hat{K}, 1)$.

Теорема 1. *Если*

$$K(\lambda)=I_n+\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}(t)e^{i\lambda t}\,dt\in\mathbf{K}^{(n\times n)}$$

допускает факторизацию

$$K(\lambda)=K_+(\lambda)K_-(\lambda)=\left(I_n+\int_0^{\infty}\hat{K}_+(t)e^{i\lambda t}\,dt\right)\left(I_n+\int_{-\infty}^{0}\hat{K}_-(t)e^{i\lambda t}\,dt\right),\qquad(10)$$

причем $K_{\pm 1}^{\pm 1}(\lambda)\in\mathbf{K}^{(n\times n)}$, *матрицы-функции* $\hat{K}_{\pm}(t)$ *непрерывны в нуле и ограничены в каждом конечном интервале, тогда*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{D_r(K)}{[G(K)]^r}=\det[T(K)T(K^{-1})],$$

где

$$G(K)=\exp\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|p|}{T}\right)\ln\det K(\lambda)\,d\lambda\right\}.$$

Доказательство: Из (10) следует, что

$$K(\lambda)K_-^{-1}(\lambda)=K_+(\lambda).$$

Применяя равенство (8) и учитывая, что $H(K_-^{-1})=0$, имеем

$$T_r(K_+)-T_r(K)T_r(K_-^{-1})=P_rH(K)H(K_-^{-1})P_r,$$

а значит

$$T_r(K_+)T_r(K_+^{-1})-T_r(K)T_r(K_-^{-1})T_r(K_+^{-1})=P_rH(K)H(K_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1}).\qquad(11)$$

Из (8) нетрудно заметить, что

$$T_r(K_+)T_r(K_+^{-1})=P_r, \quad T_r(K_-)T_r(K_-^{-1})=P_r. \tag{12}$$

Поэтому (11) примет следующий вид:

$$T_r(K)T_r(K_-^{-1})T_r(K_+^{-1}) = P_r - P_rH(K)H(\tilde{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1}). \tag{13}$$

Как отмечалось выше, при условиях теоремы, операторы $H(K)$ и $H(\tilde{K}_-^{-1})$ являются операторами Гильберта—Шмидта. Значит второй член правой части (13) является ядерным оператором. В этом случае [16] детерминант Фредгольма правой части (13) совпадает с выражением

$$\det|P_r - P_rH(K)H(K_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})| = \Pi(1-\lambda_j(r)),$$

где $\lambda_j(r)$ — собственные числа оператора $P_rH(K)H(\tilde{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})$.

Принимая во внимание, что детерминант Фредгольма от интегрального оператора, стоящего в левой части равенства (13), в точке $\lambda=1$ равняется величине $D_r(K)D_r(K_-^{-1})D_r(K_+^{-1})$, имеем

$$D_r(K)D_r(K_-^{-1})D_r(K_+^{-1}) = \det|P_r - P_rH(K)H(\tilde{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})|. \tag{14}$$

Учитывая, что $D_r(K_\pm^{-1}) = |D_r(K_\pm)|^{-1}$, (14) можно переписать в виде

$$\frac{D_r(K)}{D_r(K_+)D_r(K_-)} = \det|P_r - P_rH(K)H(\tilde{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})|. \tag{15}$$

По лемме 1

$$D_r(K_\pm) = \exp\left\{\int_0^r \operatorname{sp}\hat{K}_\pm(s-s)ds\right\} = \exp|r\operatorname{sp}\hat{K}_\pm(0)|.$$

Поэтому по лемме 2 можно утверждать, что знаменатель в левой части формулы (15) равняется $[G(K)]^r$.

Значит (15) запишется в виде:

$$\frac{D_r(K)}{[G(K)]^r} = \det|P_r - P_rH(K)H(\tilde{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1})|.$$

Очевидно, что $P_r \to I$ при $r \to \infty$ в сильном смысле, где I — тождественный оператор в $L_2^{(n)}$. Поэтому

$$P_rH(K)H(\tilde{K}_-^{-1})P_rT_r(K_+^{-1}) \to H(K)H(\tilde{K}_-^{-1})T(K_+^{-1})$$

в ядерной метрике. Так что имеем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{D_r(K)}{[G(K)]^r} = \det|I - H(K)H(\tilde{K}_-^{-1})T(K_+^{-1})|.$$

Нетрудно проверить, что

$$H(K_1K_2)=H(K_1)T(K_2)+T(K_1)H(K_2).$$

Откуда, подставляя $K_1=K_-^{-1}$, $K_2=K_+^{-1}$ и учитывая, что $H(K_+^{-1})=0$, получим

$$H(K^{-1})=H(K_-^{-1})T(K_+^{-1}).$$

Следовательно

$$I-H(K)H(K_-^{-1})T(K_+^{-1})=I-H(K)H(K^{-1})=T(K)T(K^{-1}).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если*

$$K(\lambda)=I_n+\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}(t)e^{i\lambda t}dt\in\mathbf{K}^{(n\times n)},$$

причем $\det K(\lambda)\neq 0(-\infty<\lambda<\infty)$, $\operatorname{Var}_{-\infty}^{+\infty}\arg\det K(\lambda)=0$ *и* $\hat{K}(t)$ *непрерывна в нуле и ограничена в каждом конечном интервале, тогда*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{D_r(K)}{[G(K)]^r}=\det|T(K)T(K^{-1})|.$$

Доказательство: При условиях теоремы, существует матрица-функция

$$K_1(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}_1(t)e^{i\lambda t}dt\in\mathbf{K}^{(n\times n)}$$

такая, что матрица-функция $K(\lambda)+\varepsilon K_1(\lambda)$ при всех достаточно малых $\varepsilon\neq 0$ допускает факторизацию, требуемую в теореме 1. Поэтому при таких ε верна формула

$$\frac{D_r(K+\varepsilon K_1)}{[G(K+\varepsilon K_1)]^r}=\det|T(K+\varepsilon K_1)T((K+\varepsilon K_1)^{-1})|.$$

Принимая во внимание, что все величины, входящие в эту формулу, аналитически зависят от ε, можно утверждать, что она верна и при $\varepsilon=0$.

Когда $K(\lambda)$ скалярная функция, можно вычислить $\det|T(K)T(K^{-1})|$. Точнее верна.

Теорема 3. *Если*

$$K(\lambda)=1+\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}(t)e^{i\lambda t}dt\in\mathbf{K}^{(1\times 1)},$$

причем $K(\lambda) \neq 0$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. $\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}} \arg K(\lambda) = 0$ *и* $\hat{K}(t)$ *непрерывна в нуле и ограничена в каждом конечном интервале, тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{D_r(K)}{[G(K)]^r} = \exp\left\{\int_0^\infty t l(t) l(-t)\,dt\right\},$$

где

$$G(K) = \exp\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right) \ln K(\lambda)\,d\lambda\right\},$$

$$\ln K(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) e^{i\lambda t}\,dt.$$

Постановка задачи принадлежит М. Г. Крейну. Результаты обсуждались с М. Г. Крейном и В. М. Адамяном, за что автор приносит им искреннюю благодарность.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Լ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

Արգումենտների տարբերությունից կախված, մատրիցային կորիզներով ճատված ինտեգրալ օպերատորների Ֆրեդհոլմի դետերմինանտների ասիմպտոտիկ վարքը

Հոդվածում ուսումնասիրված է

$$f(t) + \lambda \int_0^r K(t-s) f(s)\,ds = g(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant r,\ 0 < r < \infty)$$

ինտեգրալ հավասարման Ֆրեդհոլմի $D_r(K, \lambda)$ *դետերմինանտի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ* $r \to \infty$: *Ենթադրվում է, որ* $f(t)$-*ն և* $g(t)$-*ն* n *չափանի վեկտոր-ֆունկցիաներ են, իսկ* $K(t)$-*ն* $n \times n$ *չափանի մատրից-ֆունկցիա է։*

Մտցված է $K^{(n\times n)}$ *մատրից-ֆունկցիաների բանախյան հանրահաշիվը և ապացուցված է, որ եթե*

$$K(\lambda) = \ln + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(t) e^{i\lambda t}\,dt \in K^{(n\times n)}$$

մատրից-ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

$$\det K(\lambda)\neq 0\ (-\infty<\lambda<\infty)\ \text{և}\ \operatorname{Var}_{-\infty}^{+\infty}\arg\det K(\lambda)=0,\ \text{ապա}$$

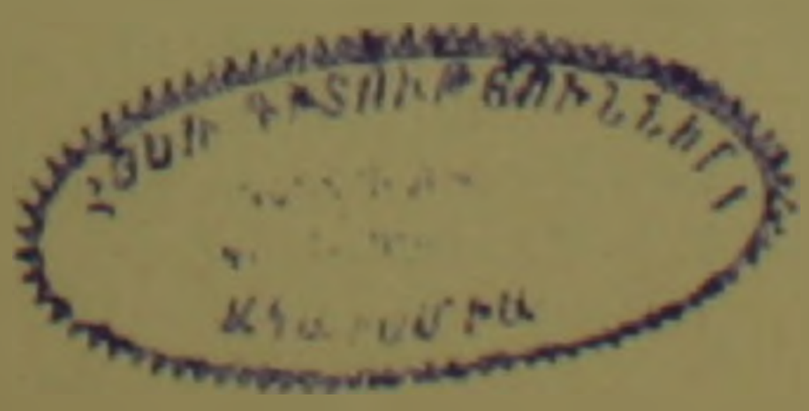
$$\lim_{T\to\infty}\frac{D_T(\hat{K},1)}{\exp\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right)\ln\det K(\lambda)d\lambda\right\}}=\det|T(K)T(K^{-1})| \qquad (*)$$

Այստեղ

$$T(K)f=f(t)+\int_0^\infty \hat{K}(t-s)f(s)ds,$$

իսկ $K^{-1}(\lambda)$-ն $K(\lambda)$-ի հակադարձն է։

Երբ $K(\lambda)$-ն սկալյար ֆունկցիա է, հաշվված է (*) հավասարության աջ մասը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *G. Szegö*, Math. Ann., 76. 490—503 (1915). [2] *М. Г. Крейн*, Мат. исследова. ние, т. 1, № 1, 1966. [3] *I. I. Hirschman* Jr., J. Math. and Mech., 16 (1966). pp 167—196. [4] *A. Devinatz*, J. of Math., 11, p.p 160—175 (1967). [5] *Я. Л. Геронимус*, „Известия АН СССР", сер. мат., т. 31, вып. 2 (1967) [6] *Б. Л. Голинский и И. А. Ибрагимов*, Мат. изв., т. 5, № 2 (1971). [7] *N. L Bowers*, Jr, Thesis, Univ. of Minnesota, 1965-[8] *H. Widom*, Adv. in Math. V. 13, p.p. 284—322 (1974) and V. 21, p.p 1—29 (1976). [9] *M. Kac*, Duke Math. J., V. 21, №3 (1954). [10] *Н. И. Ахиезер*, УМЖ, XVI, №4. (1964) [11] *И. Б. Линик*, Мат. замет., т. 6, вып. 14 (1973) [12] *В. Н Солев*, Записки науч. семинаров, ЛОМИ, т. 39, стр. 104—109 (1974). [13] *Л. В. Микаелян*, „Известия АН Арм. ССР", сер. мат., XI, № 3 (1976). [14] *И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн*. Введение теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. "Наука", М., 1967.