

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. А. Мартиросян

О равномерном приближении на комплексной плоскости многочленами с пропусками

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 15/XI 1978)

1. Пусть E —компакт из комплексной плоскости C , $A(E)$ —банахово пространство комплексных функций непрерывных на компакте E и голоморфных на множестве E° его внутренних точек с нормой $\|f\| = \sup |f|(E)$. Известный результат С. Н. Мergеляна ⁽¹⁾, дающий исчерпывающее решение проблемы комплексной полиномиальной аппроксимации, естественно приводит к следующему вопросу: при каких условиях на компакт E и на подпоследовательность натуральных чисел $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ система функций

$$\{z^{p_n}\}_{n=0}^\infty, \quad p_0 = 0, \quad (1)$$

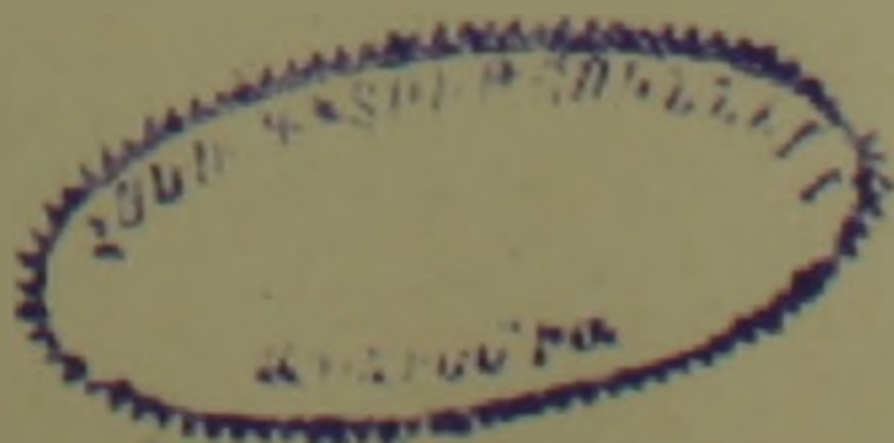
будет полной в пространстве $A(E)$, т. е. когда любую функцию из $A(E)$ можно приблизить равномерно на E многочленами вида

$$P(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^{p_n}?$$

Приведенная задача изучалась в совместной работе Н. У. Аракеляна и автора ⁽²⁾, причем предложенный в этой работе метод исследования был основан на использовании классической теоремы Вигерта—Поля о возможности однозначного аналитического продолжения степенного ряда за пределы его круга сходимости.

В настоящей работе приводится другой подход к изучению задачи о равномерном приближении многочленами с пропусками. Этот подход позволяет получить результаты работы ⁽²⁾. Кроме того, с его помощью удастся установить один новый случай возможности аппроксимации, из которого, в частности, следует уточнение известной аппроксимационной теоремы М. А. Лаврентьева.

Для формулировки основного результата работы введем обозначение



$$d_E(h) = \min_{z \in E} |z - h|.$$

Теорема. Пусть $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ — подпоследовательность натуральных чисел плотности 1, $E \subset \mathbb{C}$ — компакт со связным дополнением. Тогда система функций (1) полна в $A(E)$, если имеет место одно из следующих условий:

- а) $0 \notin E$;
- б) $0 \notin \partial E$ и существует такая последовательность $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ из $\mathbb{C} \setminus E$, что $h_m \rightarrow 0$ и

$$\overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} \frac{|h_m|}{d_E(h_m)} < +\infty;$$

- в) $0 \in \partial E$ и в любом круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ существует обходящая точку нуль жорданова кривая $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus E$;
- г) $0 \in \partial E$ и не является предельной точкой для множества E° внутренних точек компакта E .

Отметим, что пункты а), б) и в) приведенной теоремы были иным методом установлены в (2).

2. При доказательстве теоремы нам понадобится следующая

Лемма. Пусть целая функция f представляется лакунарным степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0.$$

Если для некоторого числа $\alpha > 0$ справедливы неравенства

$$|f(z)| \leq C|z|^\alpha, \quad z \in S_m,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от m , $m = 1, 2, \dots$, а круги $S_m = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_m| \leq r_m\}$ таковы, что $z_m \rightarrow \infty$ и

$$1 < \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|z_m|}{r_m} \leq \overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} \frac{|z_m|}{r_m} < +\infty,$$

тогда f является многочленом порядка не выше α .

Отметим, что лемма доказывается путем комбинирования теоремы Вигерта ((1), стр. 18) и теоремы Адамара о композиции ((1), стр. 35).

Обратимся к доказательству теоремы.

Доказательство. Пусть для комплексной борелевской меры μ на компакте E , $0 \notin E^\circ$, справедливы соотношения

$$\int_E z^n d\mu_z = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Без потери общности можно предположить, что дополнением к подпоследовательности $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ относительно множества натуральных чисел является подпоследовательность $\{q_n\}_{n=1}^\infty$; ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{q_n} = 0. \quad (3)$$

В силу теорем Хана-Банаха, Рисса и Мергеляна теорема будет доказана, если установить справедливость соотношений

$$\int_E z^{q_n} d\mu_z = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Рассмотрим функцию

$$G(t) = \int_E \frac{d\mu_z}{t-z}.$$

голоморфную по $t \in \bar{C} \setminus E$, $G(\infty) = 0$. Для любого достаточно большого t будет равномерно по $z \in E$ сходиться степенной ряд от (z/t)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{t}}.$$

Поэтому почленное интегрирование этого ряда по мере μ с учетом условий (2) показывает, что для таких значений t функция $G(t)$ будет разлагаться в степенной ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{-q_n-1} \cdot \int_E z^{q_n} d\mu_z. \quad (5)$$

Так как справедливо (3) и $0 \notin E$, то применяя к ряду (5) теорему Фабри об особых точках степенного ряда на его окружности сходимости ((¹), стр. 80), получим, что этот ряд определяет голоморфную по $t \in \bar{C} \setminus \{0\}$ функцию $G_1(t)$. Поскольку $C \setminus E$ — связно, то по теореме единственности аналитических функций будем иметь

$$G_1(t) = G(t), \quad t \in \bar{C} \setminus (E \cup \{0\}). \quad (6)$$

а) Допустим сперва, что $0 \notin E$, т. е. $0 \in \bar{C} \setminus E$ — области голоморфности функции $G(t)$. Тогда, в силу (6), $G_1(t)$ будет сужением на $\bar{C} \setminus \{0\}$ некоторой целой ограниченной функции. По теореме Лиувилля последняя функция будет константой и, в частности, будем иметь $G_1(t) \equiv \text{const}$, $t \in \bar{C} \setminus \{0\}$. Однако $G_1(\infty) = G(\infty) = 0$, поэтому получим $G_1(t) \equiv 0$, $t \in \bar{C} \setminus \{0\}$. Отсюда следует, очевидно, что все коэффициенты в тейлоровском разложении (5) функции $G_1(t)$ в окрестности точки $t = \infty$ будут нулевыми, т. е. справедливы соотношения (4).

б) Рассмотрим следующие круги из $C \setminus E$

$$D_m = \left\{ z \in C : |z - h_m| \leq \frac{1}{2} d_E(h_m) \right\},$$

где $|h_m|_{m=1}^{\infty}$ — указанная в условии теоремы последовательность точек. Так как

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{|h_m|}{d_E(h_m)} < +\infty,$$

то легко видеть, что

$$\frac{|h|}{d_E(h)} \leq C_1, \quad h \in D_m,$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от h и от m . Замечая далее, что

$$|G(t)| \leq \frac{C_2}{d_E(t)}, \quad t \in C \setminus E,$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от точки t , будем иметь

$$|G(h)h| \leq C, \quad h \in D_m,$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от h и от m . Следовательно, учитывая соотношение (6), получим

$$|G_1(h)h| \leq C, \quad h \in D_m.$$

Применяя к функции $G_1(t)$ лемму, получим, что она является полиномом от $1/t$ порядка не выше 1. Отсюда непосредственно следуют соотношения (4).

с) Так как $C \setminus E$ — связно, то в этом случае можно построить такую последовательность контуров $\gamma_k \subset C \setminus E$, обходящих точку нуль, что их диаметры стремятся к нулю и $\gamma_{k+1} \subset G_k$, где G_k — ограниченная область с границей γ_k , $k = 1, 2, \dots$. Обозначим $E_k = E \setminus (E \cap G_k)$; ясно, что $E_k \cap (E \setminus E_k) = \emptyset$, $k = 1, 2, \dots$. Из определения функции $G_1(t)$ следует, что при каждом $n = 1, 2, \dots$ и $k = 1, 2, \dots$ будем иметь

$$\int_E z^n d\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} G_1(t) t^n dt.$$

Однако $\gamma_k \subset C \setminus E$, $k = 1, 2, \dots$, и поэтому, согласно (6),

$$\int_E z^n d\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} t^n dt \int_E \frac{d\mu_z}{t-z}.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини и интегральную формулу Коши, получим

$$\int_E z^n d\mu_z = \int_{E \setminus E_k} z^n d\mu_z$$

и, следовательно, будем иметь

$$\int_{E_k} z^n d\mu_z = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Переходя в (7) к пределу при $k \rightarrow \infty$, что возможно по теореме Лебега, приходим к соотношениям (4).

d) Как известно, интеграл

$$G(t) = \int_E \frac{d\mu_z}{t-z}$$

абсолютно сходится для почти всех $t \in \bar{C}$ в смысле плоской лебеговой меры. Согласно условию теоремы найдется такой круг $U = \{z \in C : |z| < r\}$, что множество $U \cap E$ не имеет внутренних точек.

Предположим сперва*, что $G(t) = G_1(t)$ для почти всех $t \in U \cap E$ в смысле плоской лебеговой меры. Возьмем окружность γ с центром в нуле и содержащуюся внутри круга U . Имеем, что для почти всех значений $t \in U \cap E$, лежащих во внешности γ ,

$$G_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G_1(z)}{t-z} dz = G(t) \quad (8)$$

На компакте $E \cup \gamma$ зададим меру $\nu(e)$ борелевских подмножеств e следующим образом

$$\nu(e) = \mu(e \cap E) - \frac{1}{2\pi i} \int_{e \cap \gamma} G_1(t) dt \quad (9)$$

Тогда из (8) и (9) следует, что для почти всех значений $t \in U \cap E$, лежащих во внешности γ , будем иметь

$$\int_{E \cup \gamma} \frac{d\nu_z}{t-z} = 0 \quad (10)$$

Из (10) стандартными рассуждениями выводим ((³), стр. 39), что для любого борелевского подмножества $e \subset U \cap E$, лежащего во внешности γ , должно быть $\nu(e) = 0$. Но для таких множеств $\nu(e) = \mu(e)$ и, следовательно, $\mu(e) = 0$. Так как радиус окружности γ можно брать произвольно малым, то на множестве $U \cap E$ мера μ может быть сосредоточена в единственной точке 0. Следовательно, из условий ортогональности (2) получим

$$\int_{E \setminus (E \cap U)} z^n d\mu_z = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Откуда, в силу пункта а) теоремы, будем иметь

$$\int_{E \setminus (E \cap U)} z^n d\mu_z = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

или, что то же, — соотношения (4).

Допустим теперь, что равенство $G(t) = G_1(t)$ не имеет места почти везде на $U \cap E$ в смысле плоской лебеговой меры, и покажем

* Здесь используются рассуждения из работы С. Я. Хавинсона (⁴).

невозможность подобной ситуации. В силу допущения всегда найдется такая точка $t_0 \in U \cap E$, $t_0 \neq 0$, что

$$\int_E \frac{d|\mu_z|}{|t_0 - z|} < +\infty \quad (11)$$

и

$$G(t_0) \neq G_1(t_0) \quad (12)$$

Из (11) будем иметь $\mu(\{t_0\}) = 0$. Возьмем настолько малую окружность γ с центром в нуле, чтобы t_0 лежало во внешности γ . Обозначим через Ω ту из дополнительных к компакт $EU\gamma$ областей, которая содержит точку ∞ ; ясно, что $t_0 \in \partial\Omega$. Пусть окружность Γ с центром в нуле содержит внутри себя компакт E . Тогда для произвольного многочлена $Q(z)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_E Q(z) d\mu_z &= \int_E d\mu_z \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Q(t) dt \int_E \frac{d\mu_z}{t-z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Q(t) G_1(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} Q(t) G_1(t) dt \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношение (13) означает, что мера ν на $EU\gamma$, введенная по формуле (9), ортогональна к любому многочлену $Q(z)$. Так как $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ тоже многочлен, то из этой ортогональности получим

$$\int_{EU\gamma} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0} d\nu_t = 0,$$

или

$$\int_{EU\gamma} \frac{Q(t) d\nu_t}{t - t_0} = Q(t_0) \int_{EU\gamma} \frac{d\nu_t}{t - t_0} \quad (14)$$

причем, согласно (11), интегралы сходятся абсолютно. Пусть $P(EU\gamma)$ — алгебра всех непрерывных на компакте $EU\gamma$ функций, являющихся равномерными пределами многочленов. Для любой функции $g \in P(EU\gamma)$ будем иметь из (14)

$$\int_{EU\gamma} \frac{g(t) d\nu_t}{t - t_0} = g(t_0) \cdot \int_{EU\gamma} \frac{d\nu_t}{t - t_0} \quad (15)$$

Сужение $P(EU\gamma)$ на $\partial\Omega$ — алгебра $P(\partial\Omega)$ есть алгебра Дирихле ((³), стр. 30). Поэтому минимальная граница $P(\partial\Omega)$ совпадает с $\partial\Omega$ и так как $t_0 \in \partial\Omega$, то существует функция $g \in P(\partial\Omega)$ такая, что $g(t_0) = 1$, $|g(t)| < 1$, $t \in \partial\Omega$, $t \neq t_0$. В силу принципа максимума можно считать, что g продолжена на $EU\gamma$ и там имеет место неравенство $|g(t)| < 1$, $t \neq t_0$. Применяя (15) к функциям $|g^k|_{k=1}^{\infty}$, получим:

$$\int_{EU_1} \frac{g^k(t)}{t-t_0} d\nu_t = \int_{EU_1} \frac{d\nu_t}{t-t_0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Последовательность $\{g^k\}_{k=1}^\infty$ сходится на EU_1 к нулю всюду, кроме точки $t = t_0$, и, следовательно, она сходится к нулю почти везде по мере ν , так как $\nu(\{t_0\}) = \mu(\{t_0\}) = 0$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим:

$$\int_{EU_1} \frac{d\nu_t}{t-t_0} = 0.$$

Но, с другой стороны, согласно (12)

$$\int_{EU_1} \frac{d\nu_t}{t-t_0} = -G(t_0) + G_1(t_0) \neq 0,$$

противоречие. Теорема доказана.

Автор благодарен Н. У. Аракеляну за внимание к работе.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Հ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Կոմպլեքս հարթության վրա բացրոդումներով բազմանդամներով հավասարաչափ մոտարկման մասին

Թող $\{p_n\}_{n=1}^\infty$ լինի բնական թվերի որևէ ենթահաջորդականություն, իսկ E -ն C կոմպլեքս հարթության կոմպակտ ենթաբազմություն, ներկա աշխատանքում շարունակված է Ն. Հ. Առաքելյանի հետ համատեղ (*) աշխատանքում սկսած խնդրի ուսումնասիրությունը. այն է՝ երբ կամայական E կոմպակտի վրա անընդհատ և նրա E° ներքին կետերի բազմության վրա հոլոմորֆ ֆունկցիային կարելի է հավասարաչափ E -ի վրա մոտարկել

$$P(z) = \sum_{n=0}^m c_n z^{p_n}, \quad p_0 = 0,$$

տեսքի բազմանդամներով:

Ստացված է ⁽²⁾ աշխատանքի արդյունքների նոր ապացույց: Բացի
 դրանից, գտնված է մոտարկման հնարավորության նոր դեպք $\left(\frac{n}{p_n} \rightarrow 1, C \rightarrow \infty\right)$, որն իր մեջ,
 մասնավոր դեպքում, պարունակում է Մ. Լ. Լավրենտևի հայտնի թեորեմի
 ճշգրտում:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Н. Мергелян, Успехи матем. наук, т. 7, № 2, 31—122 (1952). ² Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, ДАН СССР, т. 235, № 2, 249—252 (1977). ³ Л. Биберах, Аналитическое продолжение, «Наука», М., 1967. ⁴ С. Я. Хавинсон, Матем. заметки, т. 6, № 5, 619—625 (1969). ⁵ Дж. Вермер, Банаховы алгебры и аналитические функции, в сб. «Некоторые вопросы теории приближений», «Иностр. литерат.», М., 1963.