ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Ю. Шахвердян

Гиперболическая емкость и скорость убывания мероморфных в круге функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 4/XII 1978)

В настоящей работе продолжается изучение поставленных и исследованных в 1959 году академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном вопросов, связанных с предельной скоростью убывания вдоль наперед заданного множества E единичного круга D, сгущающегося к границе ∂D, мероморфных в D функций f с заданным ростом неванлинновской характеристики $T_f(r)$. После известных работ А. Л. Шагиняна ([1-3]) эта задача исследовалась в различных направлениях многими советскими и зарубежными математиками. Здесь же мы имеем целью показать, что названная предельная скорость убывания тесно связана с емкостными характеристиками множества E. В качестве приложении приводятся теорема 5, следствие 3 и оценка снизу модуля мероморфной функции, справедливая вне некоторого исключительного множества, определяемого посредством гиперболического диаметра и гиперболической емкости.

Введем необходимые определения. Для заданной на $(0, 1)$ положительной монотонно растущей функции T через Φ_T обозначим класс всех мероморфных в D функций f с $T_f(r)=O(T(r))$, $r\to 1-0$; Ω_T обозначает класс положительных монотонных ω, $\omega(1-0)=0$ таких, что

$$\text{а)}\ \omega(r)=O(1-r/T(r)),\ r\to 1-0 \qquad \text{б)}\ \sum_{\zeta\in Z_f}\omega(|\zeta|)<\infty,$$

где б) выполняется для каждой нетождественной $f\in\Phi_T$ с непустой последовательностью нулей Z_f. Нетрудно показать, что для произвольных фиксированных $\varepsilon>0$, $0<\theta<1$

$$(1-r)(T(r+\theta(1-r)))^{-(1+\varepsilon)}\in\Omega_T, \tag{1}$$

так что класс Ω_T всегда непустой. Если $T(r)=O(1)$, $r\to 1-0$, то Φ_T совпадает с классом N Р. Неванлинны функций ограниченного вида. Через $\rho(z, \zeta)$ $(z, \zeta\in D)$ обозначается гиперболическая (неэвклидова) метрика в D; если $e\subset D$, то $dh(e)$ $(=\sup\limits_{z,\zeta\in e}\rho(z, \zeta))$ и $\mathrm{caph}(e)$ обозначают соответственно гиперболический диаметр и гиперболическую (или что то же — гриновую) емкость множества e. Относительно этого типа емкости подробнее см. ([4,5]). Для $0 \leq t < 1$ и $e \subset D$ $e(t) = \{|z| + t(1-|z|) : z \in e\}$, $e^*(=e(0))$ означает круговую проекцию e на $[0, 1)$; $C(z, \rho)$ есть неэвклидовый диск с центром $z \in D$ радиуса $\rho > 0$. Предполагается, что множество E содержится в D, лежит вне некоторой окрестности $z=0$ и имеет точки, сколь угодно близкие к ∂D. Счетная система неэвклидовых дисков постоянного радиуса $\{C_n\}_1^\infty$ образует S-покрытие E, если она в совокупности покрывает E, имеет конечную кратность и центры C_n лежат на E. Для заданного множества нетрудно указать простой алгоритм построения для него S-покрытий. Если $D \setminus E$ есть область, то для $\gamma \subset \partial E$ $m_E(\gamma)$ есть значение в нуле гармонической меры γ относительно $D \setminus E$.

Приведем следующую простую, но во многих отношениях замечательную теорему (подробное доказательство см. также ([6])):

Теорема I (*А. Л. Шагинян*, ([1])). *Если для некоторой $f \in N$ выполнено*

$$\lim_{\substack{|z| \to 1 \\ z \in E}} (1-|z|) \log|f(z)| = -\infty, \tag{2}$$

где E есть некоторая жорданова кривая, неограниченно приближающаяся к ∂D, то $f \equiv 0$. Если кривая E лежит внутри некоторого угла Штольца, то для любого $c > 0$ существует $f \in N$, для которой предел слева в (2) есть $-c$.

Н. В. Ушакова ([7]) и С. Я. Хавинсон ([8]) продолжили изучение этой теоремы в направлении нахождения условий на допустимую "малость" произвольного множества E, при которых скорость убывания (2) вдоль E остается экстремальной для класса N. В этих работах, а также в другой, более общей теореме Н. В. Ушаковой ([9]), устанавливаемые для E критерии имеют метрический характер. В приводимой ниже теореме 1 мы даем (в отдельных случаях значительно более точное) описание „малости" E в терминах гиперболической емкости.

Теорема 1. *Пусть множество E такое, что существуют нетождественная $f \in \Phi_T$ и $\omega \in \Omega_T$ так, что для некоторого θ, $0 < \theta < 1$ выполняется*

$$\lim_{\substack{|z| \to 1 \\ z \in E}} \omega(|z| + \theta(1-|z|)) \log|f(z)| = -\infty. \tag{3}$$

Тогда E может быть покрыто системой компактных множеств $\{L_n\}_1^\infty$ таких, что

$$dh(\mathbf{L}_n) = 0(1), \quad \sum_{n=1} |\log \operatorname{caph}(\mathbf{L}_n)|^{-1} < \infty \quad (n \to \infty). \tag{4}$$

Компакт $\mathbf{L}_n$ состоит из конечного числа связных компонент, каждая из которых содержит хотя бы один нуль из Z_f. То есть, если $\mathbf{L}_{n,k}$ $(1 \leq k \leq k_n)$ есть компоненты $\mathbf{L}_n$, то существуют точки $z_{n,k} \in \mathbf{L}_{n,k}$ так, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \omega(|z_{n,k}|) < \infty. \tag{5}$$

Легко видеть, что для $T(r)=O(1)$ Ω_T содержит функции, кратные $(1-r)$, так что (3) есть аналог (2). Дальше каждое множество, могущее быть покрытым системой компактов $\{L_n\}_1^\infty$, удовлетворяющих (4), называем L-множеством. В связи с некоторыми частными случаями теоремы 1 такие множества встречались в ([10]).

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 $E\subset(0, 1)$ может быть покрыто системой неэвклидовых дисков $\{C_n\}_1^\infty$, имеющих конечную сумму радиусов и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\omega(|\zeta_n|)<\infty,$$

где ζ_n есть центр C_n.

Нетрудно проверить, что функция μ_T, по существу введенная И. В. Ушаковой ([9]),

$$\mu_T(r)=\int_r^1\left(\int_t^1 \sigma(\tau)d\tau\right)dt, \quad \text{где} \quad \int_0^1 T(r)\sigma(r)dr<\infty$$

также принадлежит Ω_T. Откуда легко заметить, что следствие 1 для $E\subset(0, 1)$ содержит теорему единственности И. В. Ушаковой ([9]). Метод доказательства приведенных выше предложений не пересекается с оригинальным методом У. Хеймана ([11]), развитого и уточненного в ([9]). Можно показать, что множество

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}C(1-\alpha^{n^\beta}, n^{-\gamma}) \quad \alpha, \beta, \gamma=\text{const}; \ \beta, \gamma>1, \ 0<\alpha<1$$

удовлетворяет заключению следствия 1, но не есть L-множество. Особый интерес в этом отношении представляют примеры счетных множеств. Пусть λ_n есть правый конец отрезка $C_n^*=C^*(1-\alpha^{n^\beta}, n^{-\gamma})$, а $s_n\to 1-0$ — последовательность такая, что для $t_n=\lambda_n+s_n(1-\lambda_n)$ $(\omega(t_n))^{-1}$ есть целые числа. Распределим на C_n^* равномерно в неэвклидовом смысле $(\omega(t_n))^{-1}$ точек и через H обозначим их объединение по всем $n\geqslant 1$. Тогда счетное H удовлетворяет заключению следствия 1 и не удовлетворяет заключению теоремы 1, а это показывает, что теорема 1 действительно более точно, чем следствие 1, оценивает „малость" $E\subset(0, 1)$. Из теоремы 1 (в случае $T(r)=O(1)$) легко вытекает теорема единственности С. Я. Хавинсона ([8]), и пример множества H опять показывает, что теорема 1 действительно сильнее теоремы С. Я. Хавинсона.

Следствие 2. *Если E удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то* $\mathrm{caph}(E)<1$. Используя одну оценку Ч. Поммеренке ([12]) гиперболической емкости континуумов, из следствия 2 легко получить, что если (3) выполняется вдоль континуума E, имеющего предельные точки на ∂D, то $f\equiv 0$. В частности, имеем короткое прямое доказательство теоремы 1.

Для функции T множество E называем T-множеством (N-множеством, если $T(r)=O(1)$) в случае, если существует нетождественная $f\in\Phi_T$, удовлетворяющая (3) с некоторыми $\omega\in\Omega_T$, $0<\theta<1$. Теорема

1 устанавливает необходимые признаки для T-множеств. Интересен также противоположный вопрос: найти достаточные условия на E, при которых оно является T-множеством. Мы имеем некоторый ответ для случая N-множеств: если E может быть покрыто системой конечной кратности выпуклых множеств L^n, удовлетворяющих (4), (5), то E есть N-множество. Легко видеть что эти условия довольно близко стоят к необходимым (4), (5).

Используя следствие 2, легко строить примеры не Т-множеств—таким будет каждое E с $\mathrm{caph}(E)=1$. Например, этим свойством обладает каждое множество, содержащее последовательность континуумов K_n с $dh(K_n)\underset{n\to\infty}{\to}\infty$. На примерах важных частных случаев можно убедиться, что если некоторое E не является T-множеством и расположено некасательно к ∂D, то скорость убывания (3) вдоль E близка к экстремальной для класса Φ_T. Несмотря на то, что мы не имеем полной характеристики T-множеств (то есть одновременно необходимых и достаточных метрических, емкостных или геометрических условий), можно привести теоремы, в той или иной мере описывающие интересующую нас сторону асимптотического поведения функции из Φ_T вдоль T-множеств. Единственным утверждением, приложимым в этом случае к классам Φ_T, был следующий, один из основных в теории А. Л. Шагиняна, результат (приводим с несущественным изменением):

Теорема II (*А. Л. Шагинян*, [2,3]). *Пусть L есть жорданова спрямляемая дуга, идущая к ∂D, $E\subset L$—произвольная совокупность, измеримая вдоль L, каждая порция которой имеет положительную лебегову меру. Если $\lambda(r)\geq 0$—произвольная ограниченная функция такая, что*

$$\int_L \frac{\lambda(|z|)}{1-|z|}\, d(|z|)<\infty,$$

то для каждой нетождественной мероморфной f и произвольного $0<\theta<1$

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}}\,(T_f(r+\theta(1-r)))^{-1}\left(\int_{E(r)} \lambda(|z|)\log^+|f(z)|^{-1}\, d(|z|)\right)<\infty,$$

где для $0<r<1$ *$E(r)$ есть* $E\cap(|z|\leq r)$. Нами же доказаны следующие 2 предложения (ниже $\|f\|_e=\sup_{z\in e}|f(z)|$):

Теорема 2. *Пусть относительно компактное E есть T-множество, каждая порция которого имеет положительную гармоническую меру. Тогда для каждой нетождественной $f\in\Phi_T$ и произвольных $\omega\in\Omega_T$, $0<\delta<1$*

$$\int_{\partial E} \frac{\omega(|z|+\delta(1-|z|))}{1-|z|}\log^+|f(z)|^{-1}\, dm_r(z)<\infty \tag{6}$$

и если для каких-либо $f \in \Phi_T$, $\omega \in \Omega_T$, $0 < \theta < 1$ *этот интеграл расходится, то* $f = 0$.

Теорема 3. *Пусть* E *есть* N*-множество, каждая порция которого имеет положительную емкость и* $\{C_n\}_1^\infty$ *есть* S*-покрытие* E. *Тогда для каждой нетождественной* $f \in N$ *и произвольных фиксированных* $\xi_n \in E \cap C_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^+ \|f\|_{E \cap C_n}^{-1}}{|\log \operatorname{caph}(E \cap C_n)|} (1 - |\xi_n|) < \infty \tag{7}$$

и если для некоторой $f \in N$ *этот ряд расходится, то* $f = 0$.

Если в качестве $\omega \in \Omega_T$ выбрать функцию из (1), то (6) запишется в виде

$$\int_{\partial E} (T(|z| + \theta(1 - |z|)))^{-(1+\varepsilon)} \log^+ |f(z)|^{-1} dm_E(z) < \infty,$$

что, поскольку

$$\int_{\partial E} \frac{dm_E(z)}{1 - |z|} < \infty,$$

по форме записи напоминает теорему II. Последний интеграл сходится для каждого L-множества E. Хорошо известны [4,13] примеры множеств положительной гармонической меры (емкости) но линейной меры нуль и. по этой причине, теоремы 2, 3 применимы в тех случаях, когда теорема II не действует. Если же E удовлетворяет условиям теоремы II, то ни одно из этих трех предложений не вытекает из другого, хотя и они, по-видимому близки друг к другу. Кроме того, теорема 3 имеет то важное преимущество, что при довольно общих предположениях относительно E она дает точный результат:

Теорема 4. *Пусть* E *есть* N*-множество и является счетным объединением попарно не пересекающихся выпуклых множеств* E_n *таких, что для некоторых* $\xi_n \in E_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\xi_n|) < \infty.$$

Тогда для произвольных чисел $a_n > 0$ *таких, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^+ a_n^{-1}}{|\log \operatorname{caph}(E_n)|} (1 - |\xi_n|) < \infty$$

существует $f \in N$ *так, что для* $n \geq 1$ $0 < \|f\|_{E_n} \leq a_n$.

В теореме 4 $\operatorname{caph}(E_n)$ можно заменить на более простую величину $dh(E_n)$. Утверждение теоремы 3 остается в силе и в случае, когда относительно компактное N-множество E имеет емкость нуль, а знаменатели членов ряда (7) заменены через $M(\|f\|_{E \cap C_n}, E \cap C_n)$ $n \geq 1$, где для $\varepsilon > 0$, $e \subset D$

$$M(z, e)=\max\{u(z, e) : \rho(z,e)\geq\varepsilon\}$$

и $u(z, e)$ есть некоторый гиперболический потенциал Эванса—Сельберга e

$$u(z, e)=\int_e \log\left|\frac{1-z\bar{\xi}}{z-\xi}\right| d\mu(\xi).$$

Здесь $d\mu$ задает в e распределение положительной конечной массы, соответствующее некоторому логарифмическому потенциалу Эванса—Сельберга ([4]).

В связи с одной работой В. И. Гаврилова ([14]), касающейся теоремы А. Л. Шагиняна, Ф. Шнитцер и В. Зейдель доказали ([15]), что для произвольной непрерывной монотонно убывающей на $(0, 1)$ функции $\lambda(r)>0$ существует голоморфная в D функция $f\neq 0$ такая, что $|f(r)|\leq\lambda(r)$ в окрестности точки 1. Следующая теорема, в частности, дает возможность с достаточной степенью точности оценить снизу рост характеристики такой функции f.

Теорема 5. *Пусть $E\subset D$ есть произвольное множество, сгущающееся к единичной окружности и нетождественная мероморфная функция f такова, что для некоторой $\lambda(r)\geq 0$ $|f(z)|\leq\lambda(|z|)$, $z\in E$. Тогда для произвольных фиксированных $0<\varepsilon<1$, $0<c<\infty$ имеет место неравенство*

$$T_f(r)\geq\mathrm{const}((1-r)\log 1/\lambda(r-c(1-r)))^{1-\varepsilon},\ \mathrm{const}>0$$

справедливое для всех $r\in E(c/c+1)$ за исключением, может быть, точек r некоторого L-множества (зависящего вообще говоря от c и ε).

Последняя теорема вытекает из следующей оценки, доказываемой одновременно с теоремой 1: если нетождественная $f\in\Phi_T$ и $\omega\in\Omega_T$ есть произвольные функции, то для каждого θ, $0<\theta<1$ существует постоянная $C_{f,\theta}$ и L-множество E так, что

$$|f(z)|\geq\exp\{-C_{f,\theta}\,\omega(|z|+\theta(1-|z|))\}$$

для всех z вне E. Постоянная $C_{f,\theta}$ может быть явно выписана. Из теоремы 5 сразу вытекает следующее предложение, представляющее собой аналог известного ([13,20]) для голоморфных функций неравенства.

Следствие 3. *Для каждой мероморфной в D функции f и произвольных фиксированных $\varepsilon>0$, $0<\theta<1$ соотношение*

$$\log M_f(r)=O_{f,\theta}((T_f(r+\theta(1-r)))^{1+\varepsilon}/1-r) \qquad (M_f(r)=\max_{0\leq\varphi<2\pi}|f(re^{i\varphi})|)$$

справедливо для всех $r\in(0, 1)$ за исключением, может быть, точек r некоторого L-множества (зависящего вообще говоря от θ и ε).

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Ա. Յու. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Հիպերբոլական ունակություն և շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների նվազման արագությունը

Աշխատանքում շարունակվում է ակադեմիկոս Ա. Լ. Շահինյանի կողմից 1959 թ. դրված մերոմորֆ ֆունկցիաների նվազման էքստրեմալ արագության հետ կապված հայտնի խնդիրների ուսումնասիրությունը։ Ցույց է տրվում, որ այդ հարցերում էական դեր է խաղում հիպերբոլական ունակության գաղափարը։ Որպես հիմնական արդյունքների կիրառություն բերվում են թեորեմ 5-ը, հետևանք 3-ը և մի գնահատական ներքևից մերոմորֆ ֆունկցիաների մոդուլի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Л. Шагинян*, ДАН Арм. ССР, т. 27, № 5, 257—262 (1958). [2] *А. Л. Шагинян*, ДАН СССР, т. 129, № 2, 284—287 (1959). [3] *А. Л. Шагинян*, ИАН Арм. ССР, сер. физ-мат. н., т. 12, № 1, 3-25 (1959). [4] *M. Tsuji*, Potential theory modern function theory. Maruzen, Tokyo, 1959. [5] *Н. С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала, М., „Наука", 1966. [6] *I. S. Hwang, F. Schnitzer, W. Seidel*, Math. Z., 122, 4 (1971). [7] *И. В. Ушакова*, ДАН СССР, т. 130, 1, 29—32 (1960). [8] *С. Я. Хавинсон*, УМН, т. 18, 2, 25—98 (1963). [9] *И. В. Ушакова*, ДАН СССР, т. 137, 6, 1319—1322 (1961). [10] *А. Ю. Шахвердян*, ДАН Арм. ССР, т. 66, № 2, 76-79 (1978). [11] *W. K. Hayman*, Journ. Math. pures et appl., 35, 2, 115—126 (1956). [12] *Ch. Pommerenke*, The Michigan Math. J., 10, 1, 53—63 (1963). [13] *Р. Неванлинна*, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941. [14] *В. И. Гаврилов*, Вестник МГУ, Мат., мех., 2, 3—10 (1956). [15] *F. Schnitzer, W. Seidel*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 57, 4, 876-877 (1967). [16] *У. Хейман*, Мероморфные функции, М., „Мир", 1966.