

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. Л. Бербериан

Об исключительных множествах субгармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 23/XI 1978)

1. В этой статье мы изучаем граничное поведение субгармонической функции $u(z)$, определенной в единичном круге $D: |z| < 1$ на комплексной z -плоскости и удовлетворяющей условию

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = O(1), \text{ при } r \rightarrow 1. \quad (1)$$

Согласно классическому результату Дж. Литтлвуда ⁽¹⁾ такая функция $u(z)$ представима в виде разности

$$u(z) = v(z) - w(z) \quad (2)$$

гармонической функции $v(z)$, удовлетворяющей условию (1), и потенциала Грина $w(z)$,

$$w(z) = \int_{|a| < 1} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1 - \bar{a}z}{z - a} \right| d\mu(a), \quad (3)$$

в котором распределение масс $d\mu(a)$ подчинено условию

$$\int_{|a| < 1} (1 - |a|) d\mu(a) < +\infty. \quad (4)$$

Хорошо известно ⁽¹⁾, что гармоническая функция $v(z)$ в разложении (2) имеет почти всюду на $\Gamma: |z| = 1$ конечные угловые граничные значения. Поэтому граничное поведение субгармонической функции $u(z)$ вдоль некасательных путей в D целиком зависит от граничных свойств потенциала Грина $w(z)$. Функция $w(z)$, в которой распределение масс $d\mu(a)$ удовлетворяет условию (4), имеет почти всюду на Γ радиальные граничные пределы, равные нулю (Дж. Литтлвуд; см., например, ⁽¹⁾). Утверждать существование угловых пределов функции $u(z)$ в этом случае нельзя; соответствующие примеры приведены в статье Цудзи ⁽²⁾. Более того, угловые пределы могут не существовать, даже если распределение $d\mu(a)$ удовлетворяет более жесткому условию:

$$\Omega(r) = \int \int_{|a| < r} d\mu(a) = 0 \left(\frac{1}{(1-r^\lambda)} \right) r^{-1} \quad (5)$$

при любых $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$ ⁽¹⁾. Однако в этом случае можно утверждать, что в почти каждой точке $z = e^{i\theta}$ на Γ ($z \in \Gamma \setminus E, \text{mes } E = 0$) существует $\lim \omega(z) = 0$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$ вдоль почти всех хорд круга D , оканчивающихся в точке z ⁽¹⁾, теорема 3).

Мы уточняем здесь результаты Цудзи; уточнение касается размеров исключительного множества E в терминах непрерывной шкалы выпуклых емкостей. Доказываемые результаты используются в изучении граничных свойств субгармонических функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, и граничных свойств нормальных субгармонических функций.

2. Для произвольной точки $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ и произвольного числа $\psi, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, обозначим через $l_0(\psi)$ луч, проходящий через $e^{i\theta}$ и составляющий угол ψ с радиусом вектором точки $e^{i\theta}$. По определению ⁽²⁾, непрерывная в интервале $(0, \infty)$ функция $H(t) \geq 0$ принадлежит классу C_H , если $H(t)$ не возрастает на $(0, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow +0} H(t) = +\infty$, $tH(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow 0$ и

$$\int_0^x \frac{dt}{tH(t)} < +\infty \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(t)dt = c, \text{ где } c \neq 0, \infty. \quad (6)$$

Непрерывную функцию $h(t) \geq 0$, определенную в интервале $[0, +\infty)$, называют функцией меры, если она обладает следующими свойствами: $h(t)$ возрастает на $[0, +\infty)$, $h(0) = 0$, $t^{-2}h(t)$ — неубывающая функция при $t \rightarrow 0$. Непосредственно видно, что каждая функция $H \in C_H$ порождает функцию меры $h_H(t) = tH(t)$. Пусть $E \subset \Gamma$ произвольное борелевское множество. Обозначим через $\Lambda_h(F)$ его хаусдорфову h -меру, т. е. $\Lambda_h(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Lambda^{(h)}_\rho(E)$, где $\Lambda^{(h)}_\rho(E) = \inf \sum h(z_i)$, и infimum берется по всем покрытиям $U.S.$ множества E счетными наборами кругов S_i радиуса $r_i < \rho$. Для произвольной функции $H \in C_H$ положим

$$j_n^{(H)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)} \quad n=1,2,\dots$$

и обозначим через $\text{сар}_H E$ выпуклую емкость множества E относительно последовательности $\{j_n^{(H)}\}$ ⁽⁴⁾. В случае $H(t) = t^{\alpha-1}$ $0 < \alpha < 1$ получаем обычную α -емкость $\text{сар}_\alpha E$ и при $H(t) = \frac{1}{t}$ логарифмическую емкость $\text{сар}_0 E$.

3. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $H \in C_H$ и число γ , $0 < \gamma < 1$ — фиксированы, а функция $w(z)$ вида (3) удовлетворяет условию

$$\Omega(r) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\gamma}H(1-r)}\right) \text{ при } r \rightarrow 1 \quad (7)$$

Тогда в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E \subset \Gamma$, $\text{cap}_H E = 0$, существуют $\lim w(z) = 0$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$ и $z \in e^{i\psi}(\psi)$ для почти всех $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(t) = \int_0^t H(u) du$ и покажем, что из условия (7) следует условие

$$\int_{|a| < 1} \int h(1-|a|) d\mu(a) < \infty. \quad (8)$$

Действительно,

$$\int_{|a| < r} \int h(1-|a|) d\mu(a) = \int_0^r h(1-t) d\Omega(t) = h(1-r) \Omega(r) + \int_0^r \Omega(t) H(1-t) dt. \quad (9)$$

Подставляя в правую часть (9) выражение для $h(1-r)$ и учитывая оценки (6) и (7), получим

$$\int_{|a| < r} \int h(1-|a|) d\mu(a) = O(1) \text{ при } r \rightarrow 1,$$

что эквивалентно (8). Применяя теперь известную теорему ((²), теорема (9)), получим, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} w(re^{i\theta}) = 0$$

в каждой точке $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E_1$, $\text{cap}_H E_1 = 0$.

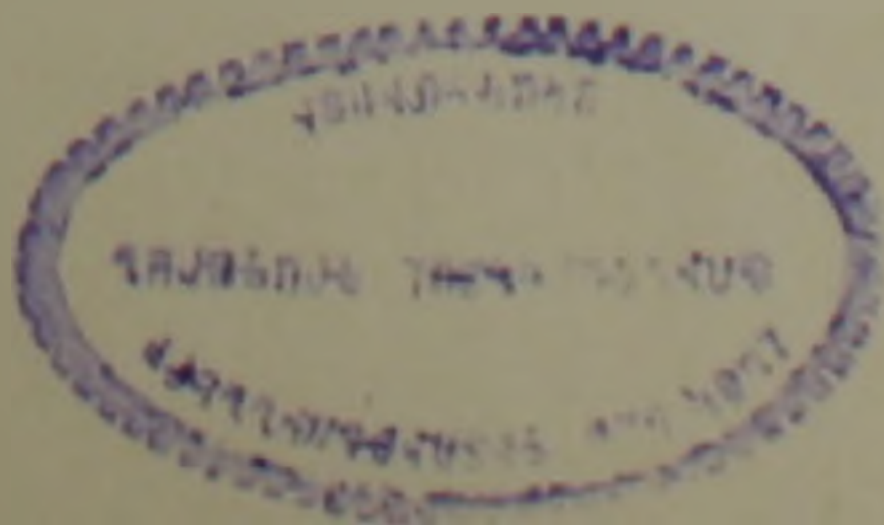
Обозначим $d\sigma(a) = (1-|a|)d\mu(a)$, тогда

$$\int_{|a| < 1} \int d\sigma(a) = \int_0^1 (1-t) d\Omega(t) = - (1-r) \Omega(r) + \int_0^1 \Omega(t) dt.$$

Учитывая оценки

$$(1-r)\Omega(r) \leq \text{const} \cdot \frac{(1-r)^\gamma}{H(1-r)}$$

$$\int_0^1 \Omega(t) dt \leq \int_0^1 \frac{\text{const} \cdot dt}{(1-t)^{1-\gamma}H(1-t)} \leq \frac{1}{H(1-r)} \int_0^1 \frac{\text{const} \cdot dt}{(1-t)^{1-\gamma}} \leq \frac{\text{const} \cdot (1-r)^\gamma}{H(1-r)}.$$



получим, что

$$\iint_{r < |z| < 1} d\sigma(a) = 0 \left(\frac{(1-r)^{\gamma}}{H(1-r)} \right) \text{ при } r \rightarrow 1.$$

Если $r_v = 1 - \frac{1}{2^v}$ ($v=1, 2, \dots$), то

$$\iint_{r_v < |z| < 1} d\sigma(a) \leq \frac{\text{const}}{2^{\gamma v} \cdot H\left(\frac{1}{2^v}\right)}. \quad (10)$$

Разделим круговое кольцо $r_v < |z| < 1$ на 2^v равных областей d_v^j :

$$r_v < |z| < 1; \frac{2\pi}{2^v} J \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{2^v} (J+1) \quad (J=0, 1, 2, \dots, 2^v - 1)$$

и перепишем неравенство (10) в виде

$$\sum_{j=0}^{2^v-1} \sigma(d_v^j) \leq \frac{\text{const}}{2^{\gamma v} \cdot H\left(\frac{1}{2^v}\right)}.$$

Обозначим через N число областей d_v^j , в которых $\sigma(d_v^j) \geq \frac{1}{2^{\gamma(1+b)}}$ при некотором $\delta, 0 < \delta < 1$. Тогда $N \leq \text{const} \frac{2^{\gamma(1+b)}}{2^{\gamma} H(1/2^v)}$. Присоединим к каждой области d_v^j две смежные области $d_{v-1}^{j-1}, d_{v-1}^{j+1}$ и положим $d_v^j = d_{v-1}^{j-1} \cup d_{v-1}^j \cup d_{v-1}^{j+1}$. Обозначим через $\gamma_{v,j}$ дуги на Γ , соответствующие областям d_v^j , а через F_v^* — множество всех дуг на Γ , которое принадлежит границе ∂d_v^j при фиксированном v . Положим $F^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{v=k}^{\infty} F_v^*$. Имеем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N |\gamma_{v,j}| H(|\gamma_{v,j}|) &= \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N 3 \cdot \left\{ \frac{2\pi}{2^v} (J+1) - \frac{2\pi}{2^v} J \right\} \cdot H\left(3 \cdot \left\{ \frac{2\pi}{2^v} (J+1) - \frac{2\pi}{2^v} J \right\}\right) \\ &\leq \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2\pi}{2^v} \cdot 3 \cdot \text{const} \cdot \frac{2^{\gamma(1+b)}}{2^{\gamma} \cdot H\left(\frac{1}{2^v}\right)} \cdot H\left(\frac{2\pi}{2^v} \cdot 3\right) \leq \sum_{v=1}^{\infty} \text{const} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2^{\gamma(1+b)}} < +\infty, \end{aligned}$$

согласно которой $\Lambda_{H,H(r)}(F^*) = 0$. Согласно лемме 1 из [5] $\text{cap}_H F^* = 0$. Обозначим дополнение к F^* относительно Γ через F . Если $e^{i\theta} \in F$, то $e^{i\theta} \in C(F_v^*)$ ($v \geq v_0$), и значит область $d_v(\theta)$,

$$d_v(\theta): r_v < |z| < 1, \theta - \frac{2\pi}{2^v} \leq \arg z \leq \theta + \frac{2\pi}{2^v}$$

содержится в объединении $d^j \cup d^{j+1}$, в которых

$$\sigma(d^j) \leq \frac{1}{2^{v(1+\delta)}} \quad \sigma(d^{j+1}) \leq \frac{1}{2^{v(1+\delta)}}.$$

Поэтому

$$\sigma(d, (b)) \leq \frac{2}{2^{v(1+\delta)}} \quad (0 < \delta < 1, v \geq v_0). \quad (11)$$

Без нарушения общности, допустим, что точка $z=1$ принадлежит F и пусть $l_0(\psi)$ луч, проходящий через точку $z=1$ и составляющий угол ψ с радиусом вектором точки $z=1$, $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Положим $\Delta_v =$

$$= \left\{ |z| < 1 \cap \left(|z-1| < \frac{1}{2^v} \right) \right\} \quad (v=1, 2, \dots).$$

Согласно (11)

$$\sigma(\Delta_v) \leq \frac{2}{2^{v(1+\delta)}} \quad (0 < \delta < 1, v \geq v_0). \quad (12)$$

Фиксируем $\psi_0, 0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$. Тогда значения функции $\lambda_v(\psi)$ при каждом $\psi \in (-\psi_0, \psi_0)$ выражают σ -массу, сосредоточенную в секторе, ограниченном окружностью $|z-1| = \frac{1}{2^v}$ и хордами $l_0(-\psi_0), l_0(\psi)$. Таким образом, $\lambda_v(\psi)$ есть возрастающая функция от ψ , $\lambda_v(\psi)$ существует почти всюду на $(-\psi_0, \psi_0)$ и

$$\int_{-\psi_0}^{\psi_0} \lambda_v(\psi) d\psi \leq \lambda_v(\psi_0) \leq \sigma(\Delta_v) \leq \frac{2}{2^{v(1+\delta)}}. \quad (13)$$

Пусть e_v^* обозначает множество всех таких ψ , для которых либо $\lambda_v(\psi)$ не существует, либо существует и $\lambda_v(\psi) \geq \frac{1}{2^v}$.

Согласно (13) имеем

$$me_v^* \leq \frac{2}{2^v} \quad (0 < \delta < 1),$$

и значит множество $e^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{v=k}^{\infty} e_v^*$ имеет $me^* = 0$. Теперь воспользуемся

следующей оценкой, доказанной Цудзи ((¹) стр. 16).

Лемма (Цудзи (¹)). Пусть распределение масс $d\alpha(a)$ удовлетворяет в области $\Delta_v, v \geq v_0$ условию (12) при произвольном фиксированном $\delta, 0 < \delta < 1$, и пусть ψ_1 — произвольное число, принадлежащее дополнению к множеству e^* относительно интервала $(-\psi_0, \psi_0)$. Тогда в произвольной точке $z \in l_0(\psi_1)$, принадлежащей кольцу

$\frac{1}{2^{v+1}} \leq |z-1| \leq \frac{1}{2^v}$, $v \geq v_0$, выполняется оценка

$$\omega(z) \leq 1 + \frac{\text{const} \cdot v}{2^{v+1}} + \frac{\text{const}}{2^v}, \quad (14)$$

в которой $\lim_{v \rightarrow \infty} 1 = 0$ и $\delta, 0 < \delta < 1$ — произвольное число.

В нашем случае условие (12) выполняется при любом δ , $0 < \delta < \gamma < 1$. Поэтому из (14) следует, что $\lim_{z \rightarrow 1, z \in \gamma(\psi)} \omega(z) = 0$.

Рассматривая в качестве E объединение $E_1 \cup F^*$, получим утверждение теоремы 1.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 взять $H(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$, где $\alpha = \lambda + \gamma$, $\lambda, 0 \leq \lambda < 1$ — фиксированное число и $0 < \gamma < 1$, то получим уточнение результата Цудзи (см. п. 1). В этом случае

$$\Omega(r) = O\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right) \quad 0 < r < 1, \quad r \rightarrow 1$$

и в каждой точке $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E \subset \Gamma$, сар. $E = 0$, где $\alpha > \lambda$, существует $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \omega(z) = 0$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$, оставаясь на хордах $e_1(\psi)$ для почти всех $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

4. Укажем некоторые приложения теоремы 1.

Заметим прежде всего (см., напр., (1), стр. 9), что интеграл

$$L(u, r) = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta \quad (15)$$

представляет собой неубывающую функцию, выпуклую относительно $\log r$ и обладающую свойством

$$r \cdot \frac{d}{dr} L(u, r) = \Omega(r) \quad (16)$$

для любого $r, 0 < r < 1$, за возможным исключением не более, чем счетного множества значений $r \in (0, 1)$. Таким образом, ограничения на рост субгармонической функции $u(z)$ влекут за собой ограничения на рост потенциала Грина $\omega(z)$.

Теорема 2. Пусть субгармоническая в D функция $u(z)$ удовлетворяет условию (1) и соотношению

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\gamma} H(1-r)}\right) \quad (17)$$

а для ее гармонической части $v(z)$ имеет место

$$\int \int_{|z| < 1} (1-r) H(1-r) |\operatorname{grad} v(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta < +\infty. \quad (18)$$

Тогда в каждой точке $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E \subset \Gamma$, $\operatorname{cap}_H E = 0$, существуют конечные и равные между собой пределы.

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}, z \in I_0(\psi)} u(z) = u(e^{i\theta})$$

для почти всех ψ , принадлежащих $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим в круге D голоморфную функцию $f(z)$, действительная часть которой равна $v(z)$. Тогда $|f'(z)|^2 = |\operatorname{grad} v(z)|^2$ и удовлетворяет условию (18). Согласно известной теореме ⁽³⁾ $f(z)$, а следовательно $v(z)$ должны иметь конечные угловые граничные значения всюду на Γ , кроме, быть может, множества E_1 , $\operatorname{cap}_H E_1 = 0$. С другой стороны потенциал Грина $\omega(z) = u(z) - v(z)$ согласно (5) и (16) удовлетворяет условию (7). В силу теоремы 1, $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}} \omega(z) = 0$ в каждой точке $z = e^{i\theta} \in \Gamma$, за возможным исключением некоторого множества $E_2 \subset \Gamma$, $\operatorname{cap}_H E_2 = 0$, когда $z = e^{i\theta}$ и $z \in I_0(\psi)$ для почти всех $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

Поскольку $E = E_1 \cup E_2$ имеет $\operatorname{cap}_H E = 0$, теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно проверить, что из условия (17) вытекает оценка $\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = O(1)$, которая в случае знакопостоянной в

D функции $u(z)$ эквивалентна условию (1).

5. Следующее ниже утверждение является немедленным следствием теоремы 2 и формулы Дугласа ⁽⁶⁾.

С л е д с т в и е 1. Пусть субгармоническая в D функция $u(z)$ удовлетворяет условиям (1) и (17) при $H(t) = t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$ и условию

$$\int \int_0^{2\pi} \frac{|u(e^{i\theta}) - u(e^{i\varphi})|}{\sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2}} d\theta d\varphi < \infty.$$

Тогда утверждение теоремы 2 имеет место всюду на Γ , кроме множества E , $\operatorname{cap}_H E = 0$, $\alpha > 1$. Действительно, согласно формуле Дугласа ⁽⁶⁾, для гармонической в D функции $v(z)$ имеет место равенство

$$\int \int_{|z|<1} |\operatorname{grad} v(z)|^2 dx dy = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|v(\theta) - v(\varphi)|}{\sin^2 \frac{\theta - \varphi}{2}} d\theta d\varphi$$

и следовательно $v(z)$ имеет угловые граничные значения на Γ всюду, кроме некоторого множества M , логарифмическая емкость которого нуль, $\operatorname{cap}_0 M = 0$. С другой стороны в силу условия (17) при $H(t) = t^{1-\alpha}$ в каждой точке $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ за возможным исключением некоторого множества $E_1 \subset \Gamma$, $\operatorname{cap}_0 E_1 = 0$, существуют $\lim w(z) = 0$, когда $z \rightarrow e^{i\theta}$ и $z(t) = e^{i\psi}$ для почти всех $\psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\psi = 0$.

Беря в качестве E объединение M и E_1 , получим утверждение следствия.

6. Действительную или комплексную функцию $f(z)$, определенную в D , называют нормальной в D , если семейство $F = \{f(S(z)) : S \in L\}$, где L — множество всевозможных взаимно-однозначных конформных отображений D на самого себя обладает следующим свойством: из любой последовательности семейства F можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом компактном подмножестве D (см., например, (7) стр. 314). В статье (7) показано, что нормальная субгармоническая функция $u(z)$, удовлетворяющая условию (1), имеет почти всюду на Γ конечные угловые граничные значения. В основе этого утверждения лежит замечание, что в каждой точке $e^{i\theta} \in \Gamma$, в которой гармоническая часть функции $u(z)$ имеет конечное угловое граничное значение, а потенциал Грина нулевой радиальный предел, существует конечное угловое граничное значение функции $u(z)$. Используя это замечание и теорему 2, имеем следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть субгармоническая и нормальная в D функция $u(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда $u(z)$ имеет конечные угловые граничные значения всюду на Γ , кроме множества E , $\operatorname{cap}_H E = 0$.

Приношу искреннюю благодарность В. И. Гаврилову, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский государственный университет

II. ՀԱՐՈՐԴՈՒԹՅԱՆ

Առթերհամանիկ ֆունկցիաների բացառիկ բազմությունների մասին

Աշխատանքում դիտարկվում են միավոր շրջանում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների ենթադասերը $H(1)$ ֆունկցիայի միջոցով սահմանված որոշակի հարդակականության նկատմամբ ուռուցիկ ունակության տերմիններով հնարավոր է լինում սալ նշված ենթադասերի ֆունկցիաների բացառիկ բազմությունների բնութագրերը:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТИРОВАНО

- ¹ M. Tsuji, Comment. math. Univ. St. Pauli, №1,3—16, 1956.
- ² В. С. Захарян, „Известия АН СССР“, сер. матем., 27, №4, 801—818(1963).
- ³ В. И. Гаврилов, В. С. Захарян, „Известия АН Арм. ССР“, сер. матем., 11, № 2, 113—123 (1976).
- ⁴ Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.
- ⁵ С. Л. Берберян, ДАН Арм. ССР, т. LXVI, №4, 216—221(1978).
- ⁶ L. Carleson, Math. Zeit. 73, №2, 190—196 (1960).
- ⁷ J. Meek, Amer. Math. Soc, 30, № 2, 313—317 (1971).